ОТОБРАЖЕНИЯ.

Понятие отображения, также как и понятия множества, является неопределяемым, поэтому мы его поясняем.

Говорят, что задано отображение множества А в множество В, если каждому элементу множества А поставлен в соответствие, по определенному правилу, единственный элемент множества В.

Иногда такие отображения называют полными отображениями в отличие от частичных отображений, которые допускают наличие в множестве А элементов, которым не ставится в соответствие никакой элемент множества В.

Отображения обозначаются, как правило, малыми греческими буквами, и если φ - отображение множества А в В, то пишут φ: $A \rightarrow B$, или $A \xrightarrow{\varphi} B$. Если при отображении φ элементу $a \in A$ поставлен в соответствие элемент $b \in B$, то пишут $a\varphi = b$, при этом b называют образом элемента a, a элемент a называют прообразом элемента b при отображении φ. Множество А называют началом, а множество В концом отображения φ.

Если $C \subseteq A$, то множество образов всех элементов $a \in C$ обозначается $C\varphi$ и называется образом множества С при отображении φ. В частности, $A\varphi$ является образом множества А при отображении φ, или множеством значений отображения .

Пример 1. если А - множество целых чисел и φ:$A \rightarrow A$, где ?(x)=$|x|$,то элементы 1 и -1 служат прообразами элемента 1, а элемент -1 не имеет прообраза и $A\varphi$ - это подмножество всех неотрицательных целых чисел.

Если $A\varphi = B$, то говорят, что φ есть отображение множества А на множество В (такое отображение называется сюръективным отображением или наложением).

Пример 2. если А - множество целых чисел и φ: $A \rightarrow A$, где $\varphi(x) = x+1$.

Пример 3. если А - множество целых чисел, В – множество четных целых чисел, и φ:$A \rightarrow B$, где $\varphi(x) = 2x$.

Пример 4. А - множество натуральных чисел, В={1;2},а отображение всем четным натуральным числам ставит в соответствие элемент 2, а всем нечетным - элемент 1.

Разумеется, каждый элемент из начала отображения имеет в точности один образ. Отображение множества А в множество В при котором каждый образ имеет только один прообраз называют вложением множества А в множество В (а также инъективным отображением), к таким отображениям относятся примеры 2 и 3, а также следующий пример 5.

Пример 5. А - множество целых чисел, В - множество рациональных чисел,

φ: $A \rightarrow B$, где $\varphi(x) = x^3$.

Отображение являющееся одновременно вложением и наложением называется взаимно однозначным (иначе биективным) отображением.

Примером биективного отображения являются подстановки, являющиеся отображением множества {1,2,...,n} на себя. Важным примером биективного отображения является тождественное отображение множества А на себя, определяемое условием $\varphi(x) = x$, для всех $x \in A$. Это отображение будем обозначать через Е. Одним из таких отображений из n символов является тождественная подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Отображение φ считается равным отображению ψ, если начала и концы этих отображений совпадают, и для каждого элемента x, принадлежащего их общему началу, справедливо равенство $\varphi(x)=\psi(x)$. Подчеркнем, что с точки зрения этого определения отображения $\varphi: A\to A$ и $\psi: A\to B$, где A - множество натуральных чисел, а B - множество целых чисел и $\varphi(x)=\psi(x)=x+1$ для всех $x\in A$ - различны.

Если конец отображения φ совпадает с началом отображения ψ, то можно определить произведение $\varphi\psi$ отображений. Именно, если $\varphi: A\to B$, а $\psi: B\to C$, то $\varphi\psi$, оо определению, отображает A в C, причем $\varphi\psi(x)= \psi(\varphi(x))$ для каждого $x\in A$. Это определение выглядит более естественным, если образ элемента x при отображении φ записывать не как φ (x), а как $x\varphi$. Тогда имеем $x(\varphi\psi) =(x\varphi)\psi$.

Ассоциативность произведения отображений формулируется следующим образом.

<u>Теорема 1</u>. Если φ, ψ и χ - отображения, то $(\varphi\psi)\chi =\varphi(\psi\chi)$ (vаписанное равенство означает, в частности, что его левая и правая части существуют одновременно).

Доказательство. Пусть левая часть существует и $\varphi: A\to B$. Ввиду существования произведения $\varphi\psi$ θмеем $\varphi: B\to C$. Из определения произведения $\varphi\psi: A\to C$. Существование левой части дает $\chi: C\to D$, после чего последовательно получаем $(\varphi\psi)\chi : A\to D$, $\psi\chi: B\to D$ и $\varphi(\psi\chi): A\to D$. Таким образом, из существования левой части вытекает существование правой, причем начала и концы отображений, стоящих в этих частях, совпадают. К аналогичным выводам можно прийти, предполагая существование правой части. Если теперь $a\in A$, то, используя определение произведения, получаем цепочку равенств $a(\varphi(\psi)\chi) = (a(\varphi\psi))\chi = ((a\varphi)\psi)\chi = (a\varphi)(\psi\chi) =$ $=a(\varphi(\psi\chi))$, в виду произвольности элемента, а это доказывает теорему.

<u>Теорема 2</u>. Если произведение отображений $\psi=(\varphi_1 (\varphi_2 (\ldots (\varphi_{n-1} \varphi_n))))$ существует, то оно существует и при любой другой расстановке скобок, сводящей вычисление к вычислению произведений двух сомножителей, причем результат не зависит от выбора этой расстановки. (Эта теорема позволяет использовать запись $\varphi_1\varphi_2 \ldots\varphi_{n-1} \varphi_n$ не расставляя скобок.)

Доказательство. Произведение одного или двух сомножителей скобок не содержит, и потому справедливость доказываемой теоремы тривиальна. Для трех сомножителей это утверждение совпадает с предыдущей теоремой. Допустим, что теорема доказана, если число сомножителей меньше n. Рассмотрим произведение $\varphi_1\varphi_2 \ldots\varphi_{n-1} \varphi_n$ с некоторой расстановкой скобок. Выделяя скобки, соответствующие последнему умножению, имеем следующие варианты.

$\psi_1=\varphi_1 (\varphi_2 \ldots \varphi_n)$,

$\psi_2 =(\varphi_1\varphi_2)(\varphi_3\ldots \varphi_n)$,

....

$\psi_{n-1}=(\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}) \varphi_n$.

Разумеется, предполагается, что внутри данных скобок задана некоторая расстановка скобок.

Ясно, что $\varphi_1=\psi$, ибо в силу индуктивного предположения произведение $\varphi_2 \ldots \varphi_n$ от расстановки скобок не зависит. Допустим, что доказаны равенства

$$\psi=\psi_1 = \ldots =\psi_{i-1}$$

Тогда $\psi_{i-1}=(\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1})(\varphi_i\varphi_{i+1} \ldots \varphi_n)=(\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1})(\varphi_i(\varphi_{i+1} \ldots \varphi_n)=((\varphi_1\ldots\varphi_{i-1})\varphi_i)(\varphi_{i+1} \ldots \varphi_n)=$ $=(\varphi_1\ldots \varphi_i)(\varphi_{i+1} \ldots \varphi_n)=\psi_i$ в силу теоремы 1 и индуктивного предположения. Продолжая этот процесс, убедимся, что $\psi=\psi_1=\ldots \psi_{n-1}$. А это и требовалось.