§5 Элементы общей алгебры.

МНОЖЕСТВА

Понятие множества является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Оно было введено в математику создателем теории множеств немецким ученым Георгом Кантором (1845-1918). Понятие множества является неопределяемым, так как всякое математическое определение одно математическое понятие выражает через другие, уже известные понятия, его можно только пояснить. Множество понимается как совокупность, набор элементов, которые могут иметь самую различную природу. Можно говорить о множестве фраз этой главы, о множестве теорем геометрии, о множестве решений данного уравнения и т.п. Множества обычно обозначают прописными буквами, а их элементы строчными буквами. Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a\in A$, если a не принадлежит A, то пишут $a\notin A$ или $a\bar{\in} A$.

Запись

$$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad (1)$$

выражает то обстоятельство, что множество A состоит в точности из элементов x_1, x_2, ..., x_n. Таким образом, при задании множества в форме (1) непосредственно, путем перебора, указываются все элементы, составляющие это множество. Например, $A=\{2,3,5\}$.

Следовательно, в форме (1) представлены лишь такие множества, все элементы которых можно перебрать в некотором порядке, т.е. множества, содержащие определенное натуральное число элементов. Такие множества называются конечными.

Конечные множества, содержащие n элементов, называются n-элементными. Так говорят о множествах одноэлементных, двухэлементных и т.п.

Множество можно задавать указанием характеристического свойства $P(x)$ его элементов, т.е. такого свойства, которым обладают все элементы этого множества и только они. Если множество A состоит из всех элементов, обладающим некоторым свойством $P(x)$, то пишут $A=\{x \mid P(x)\}$.

Например, множество $A=\{x \mid x^2=1\}$ состоит из двух элементов: $\{1;-1\}$, а множество рациональных чисел можно представить так: $\{r: r=p/q$, где p и q- целые числа и $q\neq 0\}$.

Может случиться, что характеристическим свойством, определяющим множество A, не обладает вообще ни один предмет: тогда говорят, что множество A пустое и пишут $A=\varnothing$. Например, множество действительных решений уравнения $x^2=-1$ пустое.

Говорят, что множество B является подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A (пишут $B\in A$), если во множестве A есть элементы, не принадлежащие множеству B, то множество B называют собственным подмножеством множества A (пишут $B\subset A$).

Например, если $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4\}$, то $B\in A$.

Если одновременно выполнено $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$, то говорят, что множества A и B равны и пишут $A=B$.

Объединением множеств A и B (пишут $A \cup B$) называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B. Например, объединением множеств $A=\{1,2,3\}$,$B=\{3,4,5\}$ будет множество $A \cup B=\{1,2,3,4,5\}$.

Пересечением множеств A и B (пишут $A \cap B$) называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B. Например, пересечением множеств $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5\}$ является одноэлементное множество $A \cap B=\{3\}$.

Если $A \subset U$,то множество $\{x \mid x \in U,\ x \notin A\}$ называется дополнением множества A во множестве U, и обозначается U\A или $\overline{A_{\cup}}$.

Часто приходится рассматривать только такие множества, которые все являются подмножествами некоторого определенного фиксированного множества. Например, при исследовании решений уравнений или неравенств с одним неизвестным приходится иметь дело с различными подмножествами множества R действительных чисел. В таких случаях множество U, в котором берутся дополнения, предполагается известным, поэтому говорят просто о дополнении A и обозначение $\overline{A_{\cup}}$ заменяют на $\overline{A}$.

Операцию объединения иногда называют суммой и пишут A+B вместо $A \cup B$, операцию пересечения называют произведением множеств и пишут AB вместо $A \cup B$.

Рассмотрим некоторые важные свойства операций объединения, пересечения и дополнения.

Непосредственно из определения этих операций вытекает справедливость следующих равенств (предполагается, что множества A,B,C являются подмножествами множества U):

1. $A \cap B=B \cap A$ (коммутативность пересечения);
2. $(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность пересечения);
3. $A \cap A=A$;
4. $A \cap U=A$;
5. $A \cap \overline{A}=\varnothing$.

1'. $A \cup B=B \cup A$ (коммутативность объединения);
2'. $(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность объединения);
3'. $A \cup A=A$;
4'. $A \cup \overline{U}=A$;
5'. $A \cup \overline{A}=U$;

Операции пересечения и объединения связаны между собой так называемыми дистрибутивными (распределительными) законами:

6. $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$;
6'. $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Докажем свойство 6. Для доказательства равенства двух множеств нужно показать, что каждое из них содержится в другом.

Покажем сначала, что $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Пусть $x \in A \cap (B \cup C)$. Значит, $x \in A$ и $x \in B \cup C$, т.е. $x \in A$ и либо $x \in B$, либо $x \in C$. Получается, следовательно, два случая: а) $x \in A$ и $x \in B$, б) $x \in A$ и $x \in C$. В случае а) $x \in A \cap B$, значит, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. В случае б) $x \in A \cap C$, значит, снова $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Мы показали, что из принадлежности произвольного элемента x множеству $A \cap (B \cup C)$ вытекает его принадлежность множеству $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, т.е. что $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Такими же рассуждениями доказывается обратное включение.

Аналогично можно доказать свойство 6'.

Операции объединения, пересечения и дополнения связаны так называемыми законами де Моргана.

7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

7'. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Докажем включение $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Пусть $x \in \overline{A \cap B}$, тогда $x \notin A \cap B$, и получаются два случая либо $x \notin A$, либо $x \notin B$. В первом случае $x \in \overline{A}$, значит, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, во втором $x \in \overline{B}$, а потому снова $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Аналогично доказывается обратное включение $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$, и свойство 7 . Свойство 7 (7') читается так: "дополнение объединения (пересечения) двух множеств совпадает с пересечением (объединением) дополнений этих множеств".

Впервые система с тремя операциями, удовлетворяющими свойствам 1-7, 1'-7', рассматривалась английским математиком Джорджем Булем (1815-1864), в связи с чем такие системы получили название булевых алгебр. Можно, следовательно, сказать, что система всех подмножеств некоторого множества U является булевой алгеброй по отношению к введенным операциям объединения, пересечения и дополнения.

Раздел теории множеств, который занимается исследованием операций над множествами (не только конечных, но и бесконечных операций), называется алгеброй множеств. Алгебра множеств в свою очередь является частным случаем теории булевых алгебр.