ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Переходим к вопросу о возведении комплексных чисел в степень и извлечении из них корня. Для возведения числа $z=a+bi$ в целую положительную степень n достаточно применить к выражению $(a+bi)^n$ формулу бинома Ньютона, а затем воспользоваться равенствами $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,$ откуда вообще

$$I^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i.$$

Если число z задано в тригонометрической форме, то при целом положительном n из формулы (5) вытекает следующая формула, *называемая формулой Муавра:*

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (12)$$

При возведении комплексного числа в степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени. Формула (12) верна и для целых отрицательных показателей. Действительно, ввиду $z^{-n}=(z^{-1})^n$, достаточно применить формулу Муавра к числу z^{-1}, тригонометрическую форму которого дает формула (11).

Пусть нужно извлечь корень n-ой степени из числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Предположим, что это сделать можно и что в результате получается число $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, *т. е.*

$$[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n= r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (13)$$

Тогда, по формуле Муавра, $\rho^n=r$, т. е. $\rho=\sqrt[n]{r}$, где в правой части стоит однозначно определенное положительное значение корня n-й степени из положительного действительного числа r. С другой стороны, аргумент левой части равенства (13) есть $n\theta$. Нельзя утверждать, однако, что $n\theta$ равно φ, так как эти углы могут в действительности отличаться на слагаемое, являющееся некоторым целым кратным числа 2π. Поэтому $n\theta=\varphi+2k\pi$, где k - целое число, откуда

$$\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Обратно, если мы берем число $\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$, то при любом целом k, положительном или отрицательном, n-я степень этого числа равна z. Таким образом,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}). \qquad (14)$$

Давая k различные значения, мы не всегда будем получать различные значения искомого корня. Действительно, при

$$k=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1 \qquad (15)$$

мы получим n значений корня, которые все будут различными, так как увеличение k на единицу влечет за собой увеличение аргумента на $\frac{2\pi}{n}$. Пусть теперь k произвольно. Если $k=nq+r,\ 0\le r\le n-1,$ то

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2(nq+r)\pi}{n}=\frac{\varphi+2r\pi}{n}+2q\pi,$$

т. е. значение аргумента при нашем k отличается от значения аргумента при $r=k$ на число, кратное 2π. Мы получаем, следовательно, такое же значение корня, как при значении k, равном r, т. е. входящем в систему (15).

Таким образом, *извлечение корня n-ой степени из комплексного числа z всегда возможно и дает n различных значений. Все значения корня n-й степени расположены на окружности радиуса* $\sqrt[n]{|z|}$ *с центром в нуле и делят эту окружность на n равных частей.*

В частности, корень n-й из действительного числа z имеет также n различных значений; действительных среди этих значений будет два, одно или ни одного в зависимости от знака z и четности n.