КОРНИ ИЗ ЕДИНИЦЫ

Особенно важен случай извлечения корня n-й степени из числа 1. Этот корень имеет n значений, причем, ввиду равенства 1=cos0+isin0 и формулы (14), все эти значения или, как мы будем говорить, все *корни n-й степени из единицы*, даются формулой

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = \overline{0,\ n-1}. \qquad (16)$$

Действительные значения корня n-й степени из единицы получаются из формулы (16) при значениях $k=0$ и $\frac{n}{2}$, если n четно, и при $k=0$, если n нечетно. На комплексной плоскости корни n-й степени из единицы расположены на окружности единичного круга и делят ее на n равных дуг; одной из точек деления служит число 1. Отсюда следует, что те из корней n-й степени из единицы, которые не являются действительными, расположены симметрично относительно действительной оси, т. е. попарно сопряжены.

Квадратный корень из единицы имеет два значения: 1 и -1, корень четвертой степени из единицы - четыре значения: 1, -1, i и $-i$. Для дальнейшего полезно запомнить значения кубичного корня из единицы. Это будут, ввиду (16), числа $\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$, где $k=0, 1, 2,$ т. е., кроме самой единицы, также сопряженные между собою числа

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \varepsilon_2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Все значения корня n-й степени из комплексного числа z можно получить умножением одного из этих значений на все корни n-й степени из единицы.

Действительно, пусть β будет одно из значений корня n-й степени из числа z, т. е. $\beta^n=z$, а ε - произвольное значение корня n-й степени из единицы, т. е. $\varepsilon^n=1$. Тогда $(\beta\varepsilon)^n=\beta^n\varepsilon^n=z$, т. е. $\beta\varepsilon$ также будет одним из значений для $\sqrt[n]{z}$. Умножая β на каждый из корней n-й степени из единицы, мы получаем n различных значений корня n-й степени из числа z, т. е. все значения этого корня.

Произведение двух корней n-й степени из единицы само есть корень n-й степени из единицы.

Действительно, если $\varepsilon^n=1$ и $\eta^n=1$, то $(\varepsilon\eta)^n=\varepsilon^n\eta^n=1$.

Число, обратное корню n-й степени из единицы, само есть такой же корень.

В самом деле, пусть $\varepsilon^n=1$. Тогда из $\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}=1$ следует $\varepsilon^n\cdot(\varepsilon^{-1})^n=1$. Вообще, *всякая степень корня n-й степени из единицы есть также корень n-й степени из единицы.*

Всякий корень k-й степени из единицы будет также корнем l-й степени из единицы для всякого l, кратного k. Отсюда следует. Что если мы будем рассматривать всю совокупность корней n-й степени из единицы, то некоторые из этих корней уже будут корнями n'-й степени из единицы для некоторых n', являющихся делителями числа n. Для всякого n существуют, однако, такие корни n-й степени из единицы, которые не являются корнями из единицы никакой меньшей степени. Такие корни называются *первообразными корнями* n-й степени из единицы. Их существование вытекает из формулы (16): если значение корня, соответствующее данному значению k, мы обозначим через ε_k (так что $\varepsilon_0=1$), то на основании формулы Муавра $\varepsilon_1^k=\varepsilon_k$. Никакая степень числа ε_1, меньшая, чем n-я, не будет, следовательно, равна 1, т. е. $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ является первообразным корнем.

Корень n-й степени из единицы ε тогда и только тогда будет первообразным, если его степени ε^k, $k=0, 1, \ldots, n-1$, различны, т.е. если ими исчерпываются все корни n-й степени из единицы.

Действительно, если все указанные степени числа ε различны, то ε будет, очевидно, первообразным корнем n-й степени.
Если же, например, $\varepsilon^k=\varepsilon^l$ при $0\le k<l\le n-1$, то $\varepsilon^{l-k}=1$, т. е., ввиду неравенств $1\le l-k\le n-1$, корень ε не будет первообразным.

Число ε_1, найденное выше, в общем случае - не единственный первообразный корень n-й степени. Для разыскания всех этих корней служит следующая теорема.

Если ε есть первообразный корень n- й степени из единицы, то число ε^k тогда и только тогда будет первообразным корнем n-й степени, если k взаимно просто с n.

В самом деле, пусть d будет наибольшим общим делителем чисел k и n. Если $d>1$ и $k=dk'$, $n=dn'$, то $(\varepsilon^k)^{n'}=\varepsilon^{kn'}=\varepsilon^{k'n}=(\varepsilon^n)^{k'}=1$, т. е. корень ε^k оказался корнем n'-й степени из единицы.

Пусть, с другой стороны, $d=1$ и пусть, вместе с тем, число ε^k оказывается корнем m-й степени из единицы, $1\le m<n$. Таким образом $(\varepsilon^k)^m=\varepsilon^{km}=1$. Так как число ε -первообразный корень n-й степени из единицы, т. е. лишь его степени с показателями, кратными n, могут быть равными единице, то число km будет кратным n. Отсюда вытекает, однако, так как $1\le m<n$, что числа k и n не могут быть взаимно простыми в противоречие с предположением.

Таким образом, число первообразных корней n-й степени из единицы равно числу целых положительных чисел k, меньших n и взаимно простых с ним.

Если p - простое число, то первообразными корнями p-й степени из единицы будут все эти корни, кроме самой единицы. С другой стороны, среди корней четвертой степени из единицы первообразными будут i и $-i$, но не 1 и -1.