УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Обычно изучают множества, на которых определены те или иные операции. Рассматривают множества с одной, с двумя и вообще с любым конечным числом операций. Рассматривают на множестве также и бесконечно много операций.

Множество A с некоторой системой (конечной или бесконечной), заданных на нем операций, $\Omega = \{f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, ...\}$ называют универсальной алгеброй (или просто алгеброй) и обозначают $\mathfrak{R} = < A; f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, ... >$ или $\mathfrak{R} = < A; \Omega >$.

Множество символов операций $\Omega = \{f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, ...\}$ для которых указаны их арности, называют сигнатурой алгебры.

Набор арностей основных операций алгебры называют типом алгебры и обозначают $<n_1, n_2, ...>$.

Если дана алгебра $\mathfrak{R}$ сигнатуры Ω, то подмножество $B \subseteq A$, $\mathfrak{I} = <B, \Omega>$ vазывается подалгеброй, если оно замкнуто относительно всех операций из ?. Иными словами, для любого $f_i^{n_i} \in \Omega$ n>1, и любых a_1, a_2, ... , $a_n \in B$ должно быть $a_1 a_2$ ... $a_n f_i^{n_i} \in B$. С другой стороны, элементы, отмечаемые в $\mathfrak{R}$ всеми нульарными операциями из Ω (если также существуют, должны содержаться в $\mathfrak{I}$).

Пересечение любой системы подалгебр алгебры $\mathfrak{R}$,если оно не пусто, будет подалгеброй этой алгебры.

Действительно, если в $\mathfrak{R}$ взята система подалгебр, $i \in I$, с непустым пересечением D и, если $f_i^{n_i} \in \Omega$, n>1,а d_1, d_2, ... ,d_n - любые элементы из D, то элемент $d_1 d_2$ ... $d_n f_i^{n_i}$ содержится в каждой из подалгебр $\mathfrak{R}_i$, а поэтому содержится в D с другой стороны, в каждой из подалгебр $\mathfrak{R}_i$,а поэтому и в D, содержатся и элементы, отмечаемые в $\mathfrak{R}$ всеми нульарными операциями из Ω.

Таким образом, мы получаем, что если M - непустое подмножество алгебры $\mathfrak{R}$,то в $\mathfrak{R}$ существует минимальная среди подалгебр, содержащая целиком множество M, а именно пересечение всех таких подалгебр; одной из них является сама алгебра $\mathfrak{R}$. Эта подалгебра обозначается через {M} и называется подалгеброй, порожденной множеством M. Если $\{M\} = \mathfrak{R}$,то M называется системой образующих для $\mathfrak{R}$.

Отметим, что пересечение подалгебр может быть пустым (если, конечно, сигнатура алгебры не содержит нульарных операций).

Непустое множество A с заданной на нем одной бинарной операцией, называется группоидом ,т. е. группоид - это алгебра типа <2>.

Группоидами являются все множества с операциями, приведенными в таблице 1.

Таблица 1.

Множества	операция xy
1. Натуральные числа	x^y
2. Натуральные числа	x+y
3. Натуральные числа	$x\cdot y$
4. Натуральные числа	x+2y
5. Натуральные числа	НОД (x,y)
6. Натуральные числа	НОК(x,y)
7. Натуральные числа	Max(x,y)
8. Рациональные числа	x+y
9. Целые числа	$x\cdot y$
10. Матрицы размера m×n	x+y
11. Невырожденные квадратные матрицы порядка n	$x\cdot y$
12. Подстановки из n символов	$x\cdot y$
13. Корни n-ой степени из единицы	$x\cdot y$

Элемент e∈ A называется нейтральным элементом или единицей (относительно данной операции), если a∗e=e∗a=a, для всех a∈ A. Единица существует не всегда. Причем:

<u>Теорема 1</u>. Множество с заданной операцией содержит не более одной единицы.

Доказательство: Пусть e и c - единицы. Поскольку e - единица, то e∗c=c. Но e∗c=e т.к. c - единица. Таким образом, c=e∗c=e. Если операцию называют сложением, то единицу обычно называют нулем и обозначают 0,если операцию называют умножением, то единицу часто обозначают 1.

Если (a∗b)∗c=a∗(b∗c) для любых a, b, c из A, то операция называется ассоциативной, а если a∗b=b∗a для всех a, b из A, то операция называется коммутативной.

Если множество A с заданной операцией содержит единицу e, то элемент b∈ A называется обратным элементу a∈ A, если a∗b=b∗a=e.

<u>Теорема 2</u>. Если множество A с заданной ассоциативной операцией содержит единицу e, то каждый элемент из A имеет не более одного обратного.

Доказательство: Пусть b и c обратные элементу a. Тогда, учитывая определение единицы и обратного элемента, имеем:

$$b=b*e=b*(a*c)=(b*a)*c=e*c=c.$$

Замечание. Требование ассоциативности существенно. Действительно, рассмотрим трехэлементное множество {e, a, b} с операцией ∗ заданной таблицей:

∗	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	a

Здесь e - единица, а оба элемента a и b являются обратными к a.

Непустое множество A с заданной на нем одной бинарной ассоциативной операцией, называется полугруппой. Полугруппами являются алгебры 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 из таблицы 1.

Если операция полугруппы не только ассоциативна и коммутативна, то полугруппа называется коммутативной. Полугруппа называется моногенной, если в ней содержится такой элемент a, что всякий элемент x из A может быть записан в форме $x=a^n$ для некоторого n>0. Элемент a называется образующим (или порождающим) моногенной полугруппы. Важнейшим примером моногенной полугруппы является полугруппа P положительных целых чисел относительно сложения. Ее образующей служит 1.

Среди алгебр важнейшую роль играют группы. Применения групп многочисленны и разнообразны как внутри самой математики так и вне ее. Методы теории групп плодотворно используются при изучении геометрических преобразований, в теории алгебраических уравнений, в топологии, атомной физике, теории относительности, кристаллографии и во многих других разделах науки.

Полугруппа является группой, если она содержит единицу и для каждого ее элемента существует обратный:

1. Множество действительных положительных чисел образует группу относительно операции умножения. В самом деле, умножение ассоциативно, число 1 является нейтральным элементом (1 a=a 1=a, для любого числа a),и каждому a>0 существует обратное число, равное 1/a (a·1/a=1/a· a=1).Эта группа называется мультипликативной (от латинского multiplicatio - умножение) группой положительных действительных чисел.

2. Множество R всех действительных чисел с операцией сложения есть группа, так как сложение ассоциативно, число 0 является нейтральным элементом (a+0=0+a=a для любого числа a) и для всякого числа a обратным элементом служит противоположное ему число -a (так как a+(-a)=(-a)+a=0).Эта группа называется аддитивной (от латинского additio - сложение) группой целых чисел.

3. Множество всех n-мерных векторов с действительными координатами является группой относительно сложения векторов. Действительно, эта операция ассоциативна, нейтральным элементом служит нулевой вектор (0,0,...,0),обратным для вектора $(a_1, a_2, ..., a_n)$ является вектор $(-a_1, -a_2, ...,-a_n)$.

Среди полугрупп приведенных в таблице группами являются 8,10,11,12,13.

В примерах 8,13 таблицы групповая операция некоммутативна, а в примерах 10,11,12 (при n>2) таблицы не коммутативна. Группу с коммутативной операцией называют коммутативной или абелевой (по имени норвежского математика Нильса Генриха Абеля (1802-1829)).

Группу состоящую из конечного числа n элементов, называют конечной группой порядка n, а группу с бесконечным множеством элементов - бесконечной. Группы 8,10,11,а так же мультипликативная группа положительных действительных чисел, аддитивная группа целых чисел, группа n-мерных векторов с действительными координатами относительно операции сложения являются бесконечными группами. Группы 12 и 13 таблицы конечные, порядков n! и n соответственно.

Подмножество H группы является подгруппой, если оно не пусто и вместе с любыми элементами содержит их обратные и произведение этих элементов.

Всякая подгруппа содержит единицу группы.

Действительно, по условию существует элемент $h\in H$. Но тогда $h^{-1}\in H$, что в свою очередь влечет $1=h\cdot h^{-1}\in H$.

Во всякой группе существуют две тривиальные подгруппы: вся группа и единичная подгруппа, состоящая из одной единицы.

Множество R с двумя операциями - сложения и умножения - называется кольцом, если:

(1) R образует коммутативную группу относительно сложения (аддитивная группа кольца),

(2) R образует полугруппу относительно умножения (мультипликативная группа кольца),

(3) Сложение и умножение связаны дистрибутивными законами (a+b)c=ac+bc и a(b+c)=ab+ac.

Ввиду (1),кольцо содержит нуль. Единица мультипликативной полугруппы (если она существует) называется единицей кольца. Вместо a+(-b) пишут a-b. Кольцо называется коммутативным, если коммутативна его мультипликативная полугруппа. Примерами колец служат целые, четные, рациональные и действительные числа с обычными операциями сложения и умножения. Множество квадратных матриц некоторого заданного порядка n является кольцом относительно операций сложения и умножения матриц.

Подмножество Н кольца К называется подкольцом, если оно является полугруппой его аддитивной группы и подполугруппой его мультипликативной полугруппы. Ясно, что подкольцо является кольцом относительно операций, определенных в исходном кольце. В качестве примеров можно указать кольцо четных чисел как подкольцо целых чисел, а последнее как подкольцо колец рациональных и действительных чисел. Диагональные матрицы образуют подкольцо кольца матриц.

Коммутативное кольцо называется полем, если оно содержит нейтральный элемент 1 относительно умножения, и каждый ненулевой элемент a имеет обратный b, такой, что a·b=1.

Примерами полей служат кольца рациональных действительных чисел.