ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить число инверсий в перестановке 4, 3, 1, 2.

Решение: Первое число в данной перестановке есть 4, оно образует инверсию с числами 3, 1, 2. Переходим к следующему числу, 3. Оно образует инверсии с 1 и 2. Переходим к следующему числу, 1. Единица не образует инверсий ни с одним из последующих чисел.

Суммарное число инверсий равно: 3+2=5. Таким образом, в данной перестановке 5 инверсий.

Пример 2. Определить число инверсий в перестановках и указать общий признак тех n, для которых эта перестановка четна, и тех, для которых нечетная:

а) $1, 4, 2, 3, 5, 8, 6, 7, \ldots, 4n–3, 4n, 4n–2, 4n–1$;

б) $2, 6, \ldots, 4n–2, 3, 7, \ldots, 4n–1, 4, 8, \ldots, 4n, 4n–3, \ldots, 5, 1$.

Решение: а) В этом примере перестановка из чисел $1, 2, 3, \ldots, 4n$. $4n$ чисел расположены в ряд таким образом: они разбиты на четверки чисел, где в каждой четверке на первом месте стоит число, которое при делении на 4 дает остаток 1; на втором месте стоит число, которое нацело делится на 4; на третьем месте – остаток 2; на четвертом месте – остаток 3. Числа каждой последующей четверки больше чисел любой предыдущей четверки. Общий вид четверки задан последней четверкой чисел в перестановке $4n–3, 4n, 4n—2, 4n–1$, где $n=1, 2, \ldots$, n – номер четверки в нашем ряде. Запишем нашу перестановку, добавив третью и четвертую четверки чисел:

$1, 4, 2, 3, 5, 8, 6, 7, 4\cdot3–3, 4\cdot3, 4\cdot3–2, 4\cdot3–1, 4\cdot4–3, 4\cdot4, 4\cdot4–2, 4\cdot4–1, \ldots, 4n–3, 4n, 4n–2$
$4n–1$, или $1, 4, 2, 3, |5, 8, 6, 7,| 9, 12, 10, 11,|13, 16, 14, 15,| \ldots,| 4n–3, 4n, 4n–2, 4n–1$. Заметим, что инверсии имеются только внутри четверок.

Подсчитаем инверсии в каждой четверке: в первой четверке – 2 инверсии; во второй – 2 инверсии; в третьей четверке – 2 инверсии; в четвертой – 2 инверсии и так далее в последней n-ой четверке – 2 инверсии. Таким образом, суммарное число инверсий $2+2+2+\ldots+2+2=2n$. $2n$ четное для любого n.

б) $4n$ чисел разбили на 4 группы и расположили эти группы таким образом: в первую группу записали все числа, которые при делении на 4 дают остаток 2 – это числа $2, 6, 10, 14, \ldots, 4n–2$ всего n чисел; вторая группа – числа, которые при делении на 4 дают остаток 3: $3, 7, 11, 15, \ldots, 4n–1$ – всего n чисел; в третью группу записаны все числа, которые нацело делятся на 4: $4, 8, 12, 16, \ldots, 4n$ – всего n чисел; в четвертую группу записаны все числа, которые при делении на 4 дают остаток 1, но эти числа (в отличие от трех первых групп, где числа были записаны в порядке возрастания) записали в убывающем порядке: $4n–3, 4n–7, \ldots, 13, 9, 5, 1$. Запишем еще раз нашу перестановку: $2, 6, 10, 14, 18, \ldots, 4n–2,|3, 7, 11, 15, 19, \ldots, 4n–1,|4, 8, 12, 16, 20, \ldots 4n,|4n–3, 4n–7, \ldots, 13, 9, 5, 1$.

Теперь найдем инверсии:

1) Подсчитаем число инверсий, которые образуют числа первой группы с числами второй, третьей и четвертой групп:

2 образует одну инверсию с числом 1;

6 – четыре инверсии (с числами 3, 4, 5, 1);

10 – семь инверсий (с числами 3, 7, 4, 8, 9, 5, 1);

14 – десять инверсий;

18 – тринадцать инверсий,

и так далее,

$4n$-2 – $3n–2$ инверсий (число $4n–2$ образует инверсию с каждым, стоящим за ним числом, кроме $4n–1$ и $4n$).

Суммарное число инверсий для чисел первой группы с числами второй, третьей, четвертой групп:

$1+4+7+10+13+\ldots+3n–2$ обозначим его Y_1.

Имеем сумму n членов арифметической прогрессии, разность которой равна 3.

$Y_1=(1+3n-2)n/2=(3n-1)n/2.$

2) Подсчитаем число инверсий, которые образуют числа второй группы с числами третьей и четвертой групп:

3 – одну инверсию;

7 – три инверсии;

11 – пять инверсий;

15 – семь инверсий,

и так далее,

$4n$-1 – $2n-1$ инверсию (число $4n-1$ образует инверсию с каждым, стоящим за ним числом, кроме числа $4n$) .

Суммарное число инверсий обозначим:

$Y_2=(1+2n-1)n/2=n^2.$

3) Подсчитаем число инверсий, которые образуют числа третьей группы с числами четвертой группы:

4 – одну инверсию;

8 – две инверсии;

12 – три инверсии,

и так далее,

$4n$ – n инверсий.

$Y_3=(1+n)n/2.$

4) Подсчитаем инверсии в четвертой группе чисел:

$4n-3$ – $n-1$ инверсий;

$4n-7$ – $n-2$ инверсий,

и так далее,

13 – три инверсии;

9 – две инверсии;

5 – одну инверсию;

1 – ноль инверсий.

$Y_4=(n-1+0)n/2.$

Общее число инверсий в данной перестановке: $Y=Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$;

$Y=(3n-1)n/2+n^2+(1+n)n/2+(n-1)n/2;$

$Y=(7n^2-n)/2=n(7n-1)/2.$

Остается выяснить, при каких значениях n эта перестановка четна, и при каких нечетна.

Рассмотрим четыре случая:

а) $n=4k$, где $k\in N$,

$Y=4k(28k-1)/2=2k(28k-1)$ – четное число;

б) $n=4k+1$, где k принадлежит N,

$Y=(4k+1)[7(4k+1)-1]/2=(4k+1)(28k+6)/2=(4k+1)(14k+3)$ – нечетное число;

в) $n=4k+2$, где k принадлежит N,

$Y=(4k+2)(28k+13)/2=(2k+1)(28k+13)$ – нечетное число;

г) $n=4k+3$, где k принадлежит N,

$Y=(4k+3)(28k+20)/2=(4k+3)(14k+10)$ – четное число.

Таким образом, при n, принадлежащем множеству {4, 8, 12, 16…}U{3, 7, 11, 15,…} – наша перестановка четная, а при n, принадлежащем множеству {1, 5, 9, 13,…}U{2, 6, 10, 14,…} – перестановка нечетная.

Проверим справедливость нашего решения для частных случаев, например: а) $n=1$ – имеем перестановку из четырех чисел 2, 3, 4, 1. Простым подсчетом выясняем, что в ней три инверсии (по нашей формуле $Y=n(7n-1)/2$, $Y=1(7\cdot1-1)/2=1\cdot6/2=3$ инверсии – верно);

б) n=2 – будет перестановка из восьми чисел 2, 6, 3, 7, 4, 8, 5, 1 – в ней Y=1+4+1+3+1+2+1=13 (по формуле Y=2(14–1)/2=13 инверсий – верно) и так далее.

Пример 3. Следующие подстановки разложить в произведение независимых циклов, в произведение транспозиций. Определить четность подстановки тремя способами:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 11 & 10 & 9 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \ldots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$

Решение:

а) 1) Подсчетом числа инверсий в верхней и нижней строках перестановки определяем, что подстановка четная (суммарное число инверсий – 18).

2) Разложим в произведение независимых циклов A=(1 2 3 4 5)(6 11)(7 10 8 9).

Декремент равен $d=n–s$=11–3=8. По декременту подстановка тоже четная.

3) Разложим в произведение транспозиций A= (1 2)(1 3)(1 4)(1 5)(6 11)(7 10)· · (7 8)(7 9). Подстановку A разложили в произведение восьми транспозиций. По числу транспозиций подстановка тоже четная. Таким образом, тремя способами установили, что подстановка четная.

Рассмотрим случай б:

1) По числу инверсий в верхней и нижних строках, четность подстановки зависит от числа n. Если $n=2k$, то есть четное число, то подстановка четная, а если $n=2k+1$, то подстановка нечетная. (Суммарное число инверсий $3n$).

2) B можно разложить в произведение $2n$ циклов: B=(13)(2)(46)(5)…($3n$-2 $3n$)($3n$--1) (каждая тройка чисел дает два цикла). $d=3n-2n=n$. Таким образом, по декременту подстановка четная, если $n=2k$ и если $n=2k+1$, подстановка нечетная.

3) B=(13)(46)(8 10)…($3n$-2 $3n$). B можно представить в произведение n транспозиций (каждая тройка чисел дает один цикл длины 2 (транспозиций) и один цикл длины один, то есть всего $2n$ циклов, из них n циклов длины два).

Можно доказать, что если некоторая степень цикла равна единице, то показатель степени делится на длину цикла.

Среди всех степеней подстановки, равных единице, наименьший показатель равен наименьшему общему кратному длин циклов, входящих в разложение подстановки.

Пример 4. Найти A^{100}, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение: Разложим A в произведение циклов A=(134)(257)(6 10 8)(9). Наименьшее общее кратное длин циклов равно 3. Значит $A^3=E$, а тогда $A^{100}=A^{99}*A= =(A^3)^{33}*A= =E*A=A$. Итак,

$$A^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Перемножить подстановки (из шести символов)

(16), (13), (24), (12), (34).

Решение:

$$(16)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(13)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&1&4&5&6\end{pmatrix},$$

$$(24)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&3&2&5&6\end{pmatrix},$$

$$(12)(34)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&4&3&5&6\end{pmatrix},$$

$$(16)(13)(24)(12)(34)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&1&5&4\end{pmatrix}.$$

1) 2 ,5, 1, 3, 9, 6 ,4, 7, 8; 22) 7, 1, 8, 2, 9, 3, 10, 4, 5, 6;
2) 3 ,6, 1, 2, 8, 5 ,9, 7, 4; 23) 10, 8, 9, 1, 2, 3, 7, 6, 4, 5;
3) 1, 8, 3 ,4, 2, 7, 6, 5, 9; 24) 10, 1, 8, 9, 2, 3, 4 ,7, 6, 5;
4) 2 ,9, 1, 7, 8, 6, 3 ,4, 5; 25) 8, 10, 9, 7, 1, 3, 6, 2, 4, 5;
5) 3 ,9 ,5, 1, 2, 4 ,8, 7, 6; 26) 10, 1, 9, 2, 5, 4, 6, 7, 3, 8;
4, 3, 9, 1, 5, 2, 6, 7, 8; 27) 9, 10, 7, 8, 5, 6, 1, 2, 3 ,4;