ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Минор второго порядка

$$\left|M\right| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Вычислим миноры третьего порядка, окаймляющие минор |M|. Их будет три

$$\left|M_1\right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \left|M_2\right| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\left|M_3\right| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, получили, что ранг матрицы A равен 2, обозначим $r(A)=2$.

Примечание. Всего в матрице A десять миноров третьего порядка, C_5^3. Метод позволяет утверждать, что все эти 10 миноров равны нулю (если окаймляющие миноры равны нулю).

Пример 2. Вычислим ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

Решение. Прибавляем в этой матрице ко второй строке первую строку, умноженную на (–3), к третьей строке первую строку, умноженную на (–3) и к четвертой строке первую строку, умноженную на (–1), придем к матрице:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

В новой матрице прибавляем к четвертой строке третью строку, умноженную на (–1), а к третьей строке вторую, умноженную на (–1), получим ступенчатую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице число ненулевых строк равно 3 и поэтому ранг ступенчатой матрицы равен 3 и он равен рангу матрицы A, т.е. $r(A)$=3.

Пример 3. Найти невырожденные матрицы P и T если они существуют, удовлетворяющие равенству A=PBT, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. 1) Приписываем к матрице A единичную матрицу и слева и справа. Выполняя элементарные преобразования строк в матрице A, мы будем одновременно выполнять эти преобразования в единичной матрице, стоящей слева, а выполняя элементарные преобразования столбцов в матрице A, мы будем одновременно выполнять эти преобразования в единичной матрице, стоящей справа. Путем элементарных преобразований приводим матрицу A к матрице E_k – к матрице, у которой по главной диагонали стоит k единиц, где k – ранг матрицы A, остальные элементы нули. Вместо единичной матрицы, стоящей слева, получим матрицу P_1, а вместо единичной матрицы, стоящей справа матрицу T_1: $(E|A|E) \to (P_1|E_k|T_1)$.

2) $(E|B|E) \to (P_2|E_k|T_2)$. И получаем с одной стороны $E_k=P_1AT_1$, а с другой $E_k=P_2BT_2$, отсюда имеем $P_1AT_1=P_2BT_2$ и $A=(P_1^{-1}P_2)B(T_2T_1^{-1})=PBT$.

Применим эту схему к нашим матрицам:

1) Матрицу A можно привести к ступенчатой $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, r($A$)=2, а матрицу B - к ступенчатой матрице $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, r($B$)=2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \underset{\displaystyle\qquad\qquad P_1 \qquad\quad E_2 \qquad\quad T_1}{\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

$E_2=P_1AT_1$ (1)

2) Аналогично, путем нескольких преобразований

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \underset{\displaystyle\qquad\qquad P_2 \qquad\quad E_2 \qquad\quad T_2}{\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)}$$

$E_2=P_2BT_2$ (2)

Приравниваем правые части равенств (1) и (2), получим $P_1AT_1=P_2BT_2$, откуда $A=(P_1^{-1}P_2)B(T_2\cdot T_1^{-1})=PBT$ или, обозначив $P_1^{-1}P_2=P$, а $T_2T_1^{-1}=T$, имеем $A=PBT$. Находим $P_1^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&0\\4&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $T_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$. Отсюда $P=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-5&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$ и $T=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&0&1\\0&-1&-4\end{pmatrix}$ или

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-5&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&0&1\\0&-1&-4\end{pmatrix}.$$

Примечание. Для матриц A и B одинакового размера невырожденные матрицы P и T, удовлетворяющие равенству $A=PBT$ найдутся тогда и только тогда, когда $r(A)=r(B)$.

Пример 4. Найти матрицу B, удовлетворяющую равенству $BA=C$, где C – ступенчатая матрица, к которой приводится матрица A с помощью элементарных преобразований строк:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4&1&3\\2&1&3&2&0\\1&1&0&0&0\\2&3&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Решение: Приписываем к матрице A слева единичную матрицу, затем с помощью элементарных преобразований строк приводим матрица A к ступенчатой матрице C, одновременно выполняя эти преобразования и над единичной матрицей. Матрица, полученная вместо единичной матрицы и будет искомой матрицей B: $(E|A)\to(B|C)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc}1&0&0&0&2&3&4&1&3\\0&1&0&0&2&1&3&2&0\\0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&2&3&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&2&1&3&2&0\\0&0&0&1&2&3&1&1&1\\1&0&0&0&2&3&4&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&-2&0&0&-1&3&2&0\\0&0&-2&1&0&1&1&1&1\\1&0&-2&0&0&1&4&1&3\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&-2&0&0&-1&3&2&0\\0&1&-4&1&0&0&4&3&1\\1&1&-4&0&0&0&7&3&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&-2&0&0&-1&3&2&0\\0&1&-4&1&0&0&4&3&1\\1&-1&4&-2&0&0&-1&-3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&-2&0&0&-1&3&2&0\\1&-1&4&-2&0&0&-1&-3&1\\0&1&-4&1&0&0&4&3&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&-2&0&0&-1&3&2&0\\1&-1&4&-2&0&0&-1&-3&1\\4&-3&12&-7&0&0&0&-9&5\end{array}\right)}_{B\qquad\qquad C}.$$

Получили, что матрица

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&-2&0\\1&-1&4&-2\\4&-3&12&-7\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку – перемножим матрицы B и A:

$$BA=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&-2&0\\1&-1&4&-2\\4&-3&12&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4&1&3\\2&1&3&2&0\\1&1&0&0&0\\2&3&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&-1&3&2&0\\0&0&-1&-3&1\\0&0&0&-9&5\end{pmatrix}=C.$$

Пример 5. Представить матрицу A в виде произведения элементарных матриц:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&2\\3&0&1\end{pmatrix}.$$

Решение: Схема решения задачи такова:

Одно преобразование одно преобразование

$(E|A^{-1})\to(U_1|A_1)$; $(E|A_1)\to(U_2|A_2)$; … ; $(E|A_{k-1})\to(U_k|B)$.

$$U_k\ldots U_2U_1A^{-1}=E,\ A=U_k\ldots U_2U_1$$

Найдем $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1/4&1/2\\1&-1/2&0\\0&3/4&-1/2\end{pmatrix}$.

1) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1/4&1/2\\0&1&0&1&-1/2&0\\0&0&1&0&3/4&-1/2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&-1/2&0\\1&0&0&0&-1/4&1/2\\0&0&1&0&3/4&-1/2\end{array}\right);$$

U_1

2) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1/2&0\\0&1&0&0&-1/4&1/2\\0&0&1&0&3/4&-1/2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1/2&0\\0&1&1&0&1/2&0\\0&0&1&0&3/4&-1/2\end{array}\right);$$

U_2

3) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1/2&0\\0&1&0&0&1/2&0\\0&0&1&0&3/4&-1/2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1/2&0\\0&0&1&0&3/4&-1/2\end{array}\right);$$

U_3

4) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1/2&0\\0&0&1&0&3/4&-1/2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&3/4&-1/2\end{array}\right);$$

U_4

5) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&3/4&-1/2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&-3/4&1&0&0&-1/2\end{array}\right);$$

U_5

6) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&-1/2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-2&0&0&1\end{array}\right).$$

U_6

Итак, $U_6U_5U_4U_3U_2U_1A^{-1}=E$, отсюда

$$A=U_6U_5U_4U_3U_2U_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3/4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Примечание. Только невырожденную матрицу можно представить в виде произведения элементарных матриц.

Пример 6. Для матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}.$$

1 способ. Для матрицы А обратная может быть найдена таким образом:

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A'$ (1), где A' – это присоединенная матрица к матрице A и

$$A'=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.
(Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется произведение $(-1)^{i+j}|M|$, где $|M|$ – определитель матрицы, полученной из элементов матрицы А, после вычеркивания i строки и j столбца – дополнительный минор к минору первого порядка a_{ij}).

Определитель матрицы A=1≠0, т.е. матрица невырожденная.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}=0,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}=0,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}3&1\\2&0\end{vmatrix}=2,\ A_{22}=\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=-1,\ A_{31}=\begin{vmatrix}3&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}=1,\ A_{33}=\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=-1.$$

Т.е. по формуле (1):

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&-1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

2 способ. Приписываем к матрице A слева единичную матрицу, затем с помощью элементарных преобразований строк приводим матрицу A к единичной, одновременно выполняя эти преобразования и над единичной матрицей. Матрица, полученная вместо единичной матрицы и будет искомой матрицей A^{-1}: $(E|A)\to(A^{-1}|E)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&3&1\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&1&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&1&0\\0&0&1&1&2&0\\1&0&0&2&3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&1&0\\0&-1&1&0&1&0\\1&-2&0&0&1&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&2&-1&1&0&0\\0&-1&1&0&1&0\\1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right).$$

Итак $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&-1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, также как и в первом способе.

Проверка: $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

Пример 7. Решить матричное уравнение $AX+B^{-1}=C$, (*)

где $A=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$

Решение. Из уравнения (*) имеем $AX=C-B^{-1}$, $X=A^{-1}(C-B^{-1})$,

находим, $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/2\\0&1/2\end{pmatrix}$, затем $C-B^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1/2\\0&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1/2\\1&5/2\end{pmatrix}$,

$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}$ и получим $X=\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1/2\\1&5/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&17/2\\0&-3\end{pmatrix}$.

Пример 8. Решить следующие системы, заданные расширенными матрицами методом Гаусса (метод исключения неизвестных):

а) $\Gamma=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-4&9&22\\1&2&0&-4&-3\\2&-3&1&5&-3\\3&-2&-5&1&3\end{array}\right)$, (1); б) $\Gamma=\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&5&-2&3\\2&7&3&1&5\\1&5&-9&8&1\\5&18&4&5&12\end{array}\right)$, (2);

в) $\Gamma=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&2&4&8\\-3&-2&1&3&7\\-5&-1&0&2&6\\-8&-3&1&5&1\end{array}\right)$, (3).

Решение.

а) приводим расширенную матрицу Γ к ступенчатому виду, тем самым в системе (1) последовательно исключаем неизвестные – во втором уравнении неизвестное x_1, в третьем уравнении неизвестные x_1 и x_2, а в четвертом уравнении неизвестные x_1, x_2 и x_3.

$$\Gamma \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 0 & -17 & 65 & 164 \\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110 \end{array}\right)$$

$$\to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 0 & -17 & 65 & 164 \\ 0 & 0 & -1 & 26 & 54 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 0 & 1 & -26 & -54 \\ 0 & 0 & -17 & 65 & 164 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 0 & 1 & -26 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & -377 & -754 \end{array}\right)$$

,

приведя Γ к ступенчатому виду, получили, что $r(A)=r(\Gamma)=4$, отсюда следует, что система совместна и определена.

Система (1) эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \\ x_2 + 7x_3 - 26x_4 = -63 \\ x_3 - 26x_4 = -54 \\ -377x_4 = -754 \end{cases},$$

из которой находим, что $x_4=2$, $x_3=-2$, $x_2=3$, $x_1=-1$. Таким образом, решение системы (1) – четверка чисел:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=(-1, 3, -2, 2);$$

б)

$$\Gamma \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$r(A)=r(\Gamma)=2$, система совместна и неопределенна. Система (2) эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases},$$

в которой x_1, x_2 можно объявить главными неизвестными, а x_3, x_4 – свободными неизвестными и выразить однозначно главные неизвестные через свободные, получив общее решение системы (2). Общее решение системы (2) будет $(-26x_3+ +17x_4+6,\ 7x_3-5x_4-1,\ x_3,\ x_4)$, где x_3, x_4 могут принимать любые значения.

Примечание. Придавая свободным неизвестным конкретные значения, мы можем найти бесконечно много частных решений.

в) $\Gamma \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & -11 & 15 & 31 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 310 \end{array}\right)$

$r(A)=3$, $r(\Gamma)=4$, поэтому система несовместна.

Пример 9. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра κ:

$$\begin{cases} \kappa x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \kappa x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \kappa x_3 = 1 \end{cases}.$$

Найдем определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} \kappa & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & 1 & \kappa \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa+2 & \kappa+2 & \kappa+2 \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & 1 & \kappa \end{vmatrix} = (\kappa+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & 1 & \kappa \end{vmatrix} = (\kappa+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \kappa-1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa-1 \end{vmatrix} =$$

$=(\kappa+2)(\kappa-1)^2$:

1) если $(\kappa+2)(\kappa-1)^2 \neq 0$, то система имеет единственное решение и его можно найти по правилу Крамера.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & 1 & \kappa \end{vmatrix} = (\kappa-1)^2,\ |A_2| = \begin{vmatrix} \kappa & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \kappa \end{vmatrix} = (\kappa-1)^2, |A_3| = \begin{vmatrix} \kappa & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\kappa-1)^2,$$

тогда получим $x_1=x_2=x_3=\dfrac{1}{\kappa+2}$;

2) если $A=0$, т.е. к$=-2$ или $\kappa=1$, то

а) рассмотрим сначала случай, когда $\kappa=-2$. Тогда нашей системе соответствует расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

получаем, что при $\kappa=-2$ $r(A)=2$, $r(\Gamma)=3$, т.е. в этом случае система несовместна;

б) рассмотрим случай, когда $\kappa=1$: система (1) принимает вид: $x_1+x_2+x_3=1$, $r(A)=r(\Gamma)=1$. Одно неизвестное – x_1 можем объявить главным, x_2, x_3 – свободными и имеем общее решение $(1-x_2-x_3,\ x_2,\ x_3)$, где x_2, x_3 могут принимать любые значения. Таким образом, при $\kappa=1$ система совместна и неопределенна.

Пример 10. Найти фундаментальную систему решений системы однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Каждое решение данной системы (x_1, x_2, x_3, x_4) представляет собой некоторую четырехмерную строку, или четырехмерный вектор. По определению несколько решений образуют фундаментальную систему, если:

1) эти решения линейно независимы;

2) любое решение может быть представлено в виде их линейной комбинации.

Один из способов нахождения фундаментальной системы состоит в следующем. Находим сначала общее решение данной системы уравнений. Далее выбираем одно из свободных неизвестных и полагаем его равным 1, остальные свободные неизвестные берем равными нулю, после чего определяем значения всех остальных неизвестных. Таким путем, мы получаем некоторое частное решение данной системы. Выбирая другое свободное неизвестное (и снова полагая его равным единице, а остальные свободные неизвестные – нулю), получим другое частное решение. Построенные таким образом частные решения (число которых равно числу свободных неизвестных) образуют фундаментальную систему решений. В данном случае общее решение (найденное методом Гаусса) имеет вид:

$$(x_1, x_2, (-5/2)x_1+5x_2, (7/2)x_1-7x_2).$$

Фундаментальная система решений: (1, 0, –5/2, 7/2), (0, 1, 5, –7), любое решение (x_1, x_2, x_3, x_4) данной системы уравнений может быть представлено в виде линейной комбинации:

$$c_1(1, 0, -5/2 , 7/2)+c_2(0, 1, 5, -7), \qquad \text{где } c_1=x_1,\ c_2=x_2.$$