## Методы вычисления определителей n–го порядка

### 1. Метод приведения к треугольному виду

Этот метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, где все элементы, лежащие по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю.

*Пример 1*. Вычислить определитель порядка $n$

$$d=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим первую строку, умноженную на $(-x)$ ко всем остальным:

$$d=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}.$$

К первому столбцу прибавим все последующие столбцы, умноженные на $(1/x)$. Получим

$$d=\begin{vmatrix} (n-1)/x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}.$$

Мы получили треугольный вид, следовательно, определитель равен произведению элементов главной диагонали

$$d=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}.$$

*Пример 2.* Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 2 & \dots & 2 & 2 & -1 \\ 2 & \dots & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \dots & -1 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к первой строке все остальные, тогда в первой строке все элементы будут равны $2(n–1)–1=2n–3$ и, следовательно, общий множитель можно вынести за знак определителя:

$$d=(2n-3)\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \dots & -1 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь воспользуемся тем, что в первой строке все элементы равны 1. Умножая первую строку на (–2) и прибавляя её ко всем остальным строкам, мы получим

$$d=(2n-3)\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \dots & -3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Побочная диагональ в определитель $n$-го порядка входит со знаком $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (это легко проверить, если подсчитать число инверсий в подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$). Тогда получим

$$d=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(2n-3)(-3)^{n-1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}3^{n-1}(2n-3).$$

*Пример 3.* Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & n \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к ($n$–1)-му столбцу $n$-ый, затем полученный ($n$–1)-ый столбец прибавим к ($n$–2)-му, и т. д. Тогда получим определитель треугольного вида

$$d = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} - 1 & \frac{n(n+1)}{2} - 3 & \dots & 2n-1 & n \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = n!\frac{n(n+1)}{2}.$$

## 2. Разложение определителя по строке (столбцу)

*Пример 1.* Вычислить определитель $d$ разложением по третьей строке, если

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & -7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Мы знаем, что имеет место, следующее разложение определителя по $i$-ой строке: $d=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$, где $A_{ij}$, $j=\overline{1,n}$ – алгебраические дополнения элементов определителя. В нашем случае формула принимает вид $d=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}$, т. е. мы имеем следующее разложение:

$$d=5\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}+(-9)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -3 & 7 & 4 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix}+$$

$$+(-7)\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя полученные определители третьего порядка, получим

$$d=5\cdot(-6)+9\cdot 12+2\cdot(-54)+7\cdot(-3)=-51.$$

*Пример 2.* Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 & 6 \\ 2 & -8 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавляя третью строку, умноженную на (–1) ко всем остальным, получим

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -13 & -13 & -9 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя к третьей строке первую, умноженную на (–2), получим

$$d=\begin{vmatrix}1 & 9 & 0 & 2\\ 0 & -13 & -13 & -9\\ 0 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 5 & 3 & 3\end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по первому столбцу, содержащему лишь один, не равный нулю элемент (с суммой индексов 1+1=2, т. е. чётной), получим

$$d=\begin{vmatrix}-13 & -13 & -9\\ -3 & 5 & 0\\ 5 & 3 & 3\end{vmatrix}.$$

Преобразуем полученный определитель. Прибавляя к первой строке третью, умноженную на 3, получим

$$d=\begin{vmatrix}2 & -4 & 0\\ -3 & 5 & 0\\ 5 & 3 & 3\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель в третьем столбце содержит лишь один, не равный нулю элемент (с суммой индексов 3+3, т. е. чётной). Поэтому его удобно разложить по третьему столбцу:

$$d=3\begin{vmatrix}2 & -4\\ -3 & 5\end{vmatrix}=3(10-12)=-6.$$

*Пример 3.* Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n\\ -n & 0 & 0 & \dots & 0 & n\end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по 1-му столбцу, тогда

$$d=(-1)^2\begin{vmatrix}2 & -2 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n\\ 0 & 0 & \dots & 0 & n\end{vmatrix}+(-1)^{1+n}(-n)\begin{vmatrix}-1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 2 & -2 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n\end{vmatrix}.$$

В этом равенстве первый и второй определители имеют треугольный вид, поэтому первый определитель равен $n!$, а второй определитель равен $(-1)(-2)\ldots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

Тогда получим:

$$d = n! + n!\left(-1\right)^{n+2+n-1} = n!\left(1 + \left(-1\right)^{2n+1}\right) = 0.$$

## 3. Теорема Лапласа

Пусть в определителе $d$ порядка $n$ произвольно выбраны $k$ строк (или $k$ столбцов), $1?k=n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров $k$–го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равна определителю $d$.

*Пример 1*. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определитель, предварительно преобразовав его.

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Выберем третью и четвёртую строки. В них находится единственный минор отличный от нуля, поэтому

$$d=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \cdot(-1)^{3+4+4+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Воспользовавшись формулами для вычисления определителей второго и третьего порядков, получим $d$=-(12–12+16+27)=-43.

*Пример 2.* Вычислить определитель

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Данный определитель имеет вид, указанный в следствии из теоремы Лапласа, поэтому мы можем этим следствием воспользоваться. Тогда

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5, \left|B\right| = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 5 \\ 0 & \dots & 5 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-3} = \left(-1\right)^{\frac{(n-3)(n-4)}{2}} 5^{n-3}.$$

По следствию из теоремы Лапласа имеем:

$$d = |A||B| = (-1)^{\frac{n^2-7n+14}{2}} 5^{n-2}.$$

## 4. Метод выделения линейных множителей

Определитель рассматривается как многочлен от одной или нескольких входящих в него букв. Преобразуя его, обнаруживают, что он делится на ряд линейных множителей, а значит (если эти множители взаимно просты) и на их произведение. Сравнивая отдельные члены определителя с членами произведения линейных множителей, находят частное от деления определителя на это произведение и тем самым находят выражение определителя.

*Пример.* Вычислить определитель методом линейных множителей

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к первой строке вторую, умноженную на (–1), а к третьей – четвёртую, умноженную на (–1):

$$d=\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-4 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся тем, что в первой строке и в третьей строке стоит лишь по одному неравному нулю элементу, и обнулим элементы, стоящие во втором и третьем столбцах:

$$d=\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке четвёртую, тогда

$$d=\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из первой строки видно, что определитель делится на $x^2–1$, из второй строки видно, что определитель делится на 3, а из третьей строки видно, что он делится на $x^2–4$. Так как все эти множители взаимно просты, то определитель делится на их произведение $3(x^2–1)(x^2–4)$. В данном произведении член $x^4$ имеет знак “+”, а в определителе он содержится со знаком “–”, поэтому $d = -3(x^2-1)(x^2-4)$.

## 5. Метод представления определителя в виде суммы определителей

Некоторые определители легко вычисляются путём разложения их в сумму определителей того же порядка относительно строк или столбцов.

*Пример.* Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 2+a & 1 & a & a \\ 2+b & 2 & b & a \\ 2+c & 3 & c & a \\ 2+d & 4 & d & a \end{vmatrix}.$$

Элементы первого столбца являются суммами двух слагаемых, это даёт возможность данный определитель представить как сумму двух определителей:

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a & a \\ 2 & 2 & b & a \\ 2 & 3 & c & a \\ 2 & 4 & d & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 & a & a \\ b & 2 & b & a \\ c & 3 & c & a \\ d & 4 & d & a \end{vmatrix}.$$

В первом определителе первый и четвёртый столбцы пропорциональны, следовательно, он равен нулю. Во втором определителе первый и третий столбцы равны, следовательно, он тоже равен нулю. Таким образом, $d=0$.

## 6. Метод изменения элементов определителя

Этот метод основан на следующем свойстве: если ко всем элементам определителя $D$ прибавить одно и то же число $x$, то определитель увеличится на произведение числа $x$ на сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя $D$.

$$D'=D+x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} .$$

Таким образом, вычисление определителя $D$? сводится к вычислению определителя $D$ и суммы его алгебраических дополнений. Этот метод применяют в тех случаях, когда путём изменения всех элементов определителя на одно и то же число он приводится к такому виду, в котором легко сосчитать алгебраические дополнения всех элементов.

*Пример.* Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & x & a_n \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко всем элементам число $(-x)$, тогда

$$D'=\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов определителя $D$, не лежащих на главной диагонали, равны нулю. Остальные алгебраические дополнения имеют положительный знак, поскольку все суммы индексов чётные. В нашем случае формула принимает вид:

$$D'=(a_1-x)\dots(a_n-x),$$

$$x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} =-x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)\dots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\dots(a_n-x) .$$

Тогда искомый определитель

$$D=D'-x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} =(a_1-x)\dots(a_n-x)+x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)\dots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\dots(a_n-x)=$$

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1-x} + \dots + \frac{1}{a_n-x}\right].$$

**7. Метод рекуррентных соотношений**

Этот метод заключается в том, что данный определитель выражают, преобразуя и разлагая его по строке или столбцу, через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением. Этот метод используется для вычисления определителей вида

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & \beta & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}.$$

$D_n-(\alpha+\beta)D_{n-1}+\alpha\beta D_{n-2}=0$ или, в общем виде $D_n-pD_{n-1}+qD_{n-2}=0$, где $p=\alpha+\beta$, $q=\alpha\beta$.

Пусть рекуррентное соотношение имеет вид:

$$D_n=pD_{n-1}-qD_{n-2},\ n>2, \tag{5}$$

где $p$, $q$ – постоянные не зависящие от $n$.

При $q=0$ $D_n$ вычисляется как член геометрической прогрессии:
$D_n=p^{n-1}D_1$; здесь $D_1$ – определитель 1–го порядка данного вида, т. е. элемент определителя $D_n$, стоящий в левом верхнем углу.

Пусть $q>0$ и $\alpha$, $\beta$ – корни квадратного уравнения $x^2-px+q=0$. Тогда $p=\alpha+\beta$, $q=\alpha\beta$ и равенство (5) можно переписать так:

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}) \tag{6}$$

или

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2}). \tag{7}$$

Предположим сначала, что $\alpha?\beta$. По формуле $(n-1)$–го члена геометрической прогрессии находим из равенств (6) и (7):

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1) \text{ и } D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1).$$

Откуда

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}(D_2-\beta D_1)-\beta^{n-1}(D_2-\alpha D_1)}{\alpha-\beta}. \tag{8}$$

Пусть теперь $\alpha=\beta$. Равенства (6) и (7) обращаются в одно и то же

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\alpha\,(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}),$$

откуда

$$D_n-\alpha D_{n-1}=A\alpha^{n-2}, \tag{9}$$

где $A=D_2-\alpha D_1$.

Заменяя здесь $n$ на $n-1$, получим:

$$D_{n-1}-\alpha D_{n-2}=A\alpha^{n-3}, \text{ откуда } D_{n-1}=\alpha D_{n-2}+A\alpha^{n-3}.$$

Подставляя это выражение в равенство (9), найдём $D_n=\alpha^2 D_{n-2}+2A\alpha^{n-2}$. Повторяя тот же приём несколько раз, получим

$$D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)A\alpha^{n-2},$$

где $A=D_2-\alpha D_1$.

*Пример 1*. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений.

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по первой строке, тогда

$$D_n=2(-1)^{1+1}D_{n-1}+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Определитель в последнем равенстве разложим по первому столбцу, тогда $D_n$ примет вид: $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$. Значит $p=2$, $q=1$. Решая уравнение $x^2-2x+1=0$, находим $\alpha$, $\beta$ и придём к случаю, когда $\alpha=\beta$. Тогда по формуле

$D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)A\alpha^{n-2}$, где $A=D_2-\alpha D_1$ находим, при $\alpha=1$, $D_n=D_1+(n-1)A$. В нашем случае $D_1=2$, $D_2=3$, тогда $A=3-2=1$. Следовательно, $D_n=2+(n-1)=n+1$.

*Пример 2.* Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений:

$$d=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разлагая $d$ по последней строке, получим

$$D_n=2(-1)^{n+n}D_{n-1}+(-1)^{n+(n-1)}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель в последнем равенстве разложим по $(n-1)$–му столбцу, тогда $D_n$ примет вид: $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$. Значит $p=2$, $q=1$. Решая уравнение $x^2-2x+1=0$, находим $\alpha$, $\beta$ и придём к случаю, когда $\alpha=\beta$.

Тогда по формуле $D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)A\alpha^{n-2}$, где $A=D_2-\alpha D_1$ находим, при $\alpha=1$, $D_n=D_1+(n-1)A$. В нашем случае $D_1=3$, $D_2=-2$, тогда $A=-5$. Следовательно, $D_n=3+(n-1)(-5)=8-5n$.

## 8. Определитель Вандермонда

Определителем Вандермонда называется определитель вида

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что при любом $n$ определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей $a_i$–$a_j$, где 1?j<$i$=$n$. Действительно при $n$=2 будет

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 .$$

Пусть наше утверждение уже доказано для определителей Вандермонда ($n$–1)-го порядка. Преобразуем определитель $d$ следующим образом: к $n$-й (последней строке) прибавим ($n$–1)-ю, умноженную на (–$a_1$), затем к ($n$–1)-й прибавим ($n$–2)-ю, также умноженную на (–$a_1$), и т. д. Наконец ко второй строке прибавим первую, умноженную на (–$a_1$).

Мы получим:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по первому столбцу, мы придём к определителю ($n$–1)-го порядка; после вынесения из всех столбцов общих множителей за знак определителя он примет вид:

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Последний множитель является определителем Вандермонда ($n$–1)-го порядка, т. е., по предположению, равен произведению всех разностей $a_i$–$a_j$ для 2 ? j < $i$ = $n$. Можно написать, следовательно, употребляя символ для обозначения произведения, что

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)\prod_{2\le i<j\le n}(a_i - a_j) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_i - a_j).$$