ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. ОТНОШЕНИЯ. ОПЕРАЦИИ.

При задании какого-нибудь конечного множества безразлично, в каком порядке перечисляются элементы. Например, множества $\{a,b\}$ и $\{b,a\}$ совпадают, так как состоят из одних и тех же элементов, хотя в первой записи элемент a указывается прежде элемента b, во второй записи наоборот. Часто, однако, приходится иметь дело с упорядоченными конечными наборами элементов, т.е. такими конечными множествами, для которых указан определенный порядок следования элементов.

В геометрии, например, каждая точка плоскости однозначно определяется упорядоченной парой чисел (x,y), а в пространстве упорядоченной тройкой чисел (x,y,z). В общем случае вводится понятие упорядоченной n-ки элементов или кортежа длины n.

Кортеж длины n определяется на n-элементное множество, для которого указан порядок следования элементов. Кортеж, первым элементом которого является x_1, вторым - x_2,..., n-м – x_n, обозначается $<x_1, x_2,...,x_n>$. Два кортежа $<x_1, x_2,...,x_n>$ и $<y_1, y_2,...,y_n>$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$..., $x_n = y_n$.

Элементы кортежа могут принадлежать одному множеству и могут также лежать в разных множествах. Часто рассматриваются такие кортежи, первый элемент которых лежит в некотором множестве A_1, второй - в другом множестве A_2 и т.д.

Множество всевозможных кортежей $<x_1, x_2,...,x_n>$, таких что $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ... , $x_n \in A_n$, называется прямым (декартовым) произведением множеств A_1, A_2, ... , A_n и обозначается $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ или $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Множества A_1, A_2, ... , A_n называются сомножителями прямого произведения $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Из определения прямого произведения видно, что оно зависит от порядка сомножителей, если множители A,B разные, то прямые произведения $A \times B$ и $B \times A$ не совпадают, т.е. прямые произведения множеств не коммутативны.

Множество всех точек плоскости можно рассматривать как прямое произведение $R \times R$ (где R - множество действительных чисел),а множество всех точек пространства - как $R \times R \times R$.

Если в прямом произведении множеств $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ все множители равны, т.е. $A_1=A_2=...=A_n=A$, то такое прямое произведение обозначают A^n и называют n-ой прямой (декартовой) степенью множества A.

Пример: Пусть $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2,3\}$

Тогда: $A \times B=\{<a,1>,<a,2>,<a,3>,<b,1>,<b,2>,<b,3>\}$

$B \times A=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>,<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

$A =\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>\}$

$B =\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>,<3,3>\}$

$A =\{<a,a,a>,<a,a,b>,<a,b,b>,<a,b,a>,<b,a,a>,<b,a,b>,<b,b,a>,<b,b,b>\}$

$A=\{<a,a,a,a>, <a,a,a,b>, <a,a,b,a>, <a,a,b,b>, <a,b,a,a>, <a,b,a,b>, <a,b,b,a>, <a,b,b,b>, <b,a,a,a>, <b,a,a,b>, <b,a,b,a>, <b,a,b,b>, <b,b,a,a>, <b,b,a,b>, <b,b,b,a>, <b,b,b,b>\}$.

Нетрудно заметить, что если множество A_1 содержит n_1 элементов, A_2 содержит n_2 элементов, то множество $A_1 \times A_2$ содержит $n_1 \cdot n_2$ элементов. В общем случае, если множество A_i содержит n_i элементов $i=\overline{1,k}$, то множество

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ содержит $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ элементов (число элементов конечного множества называют мощностью множества).

Пусть даны множества A_1, A_2, ... , A_n. Если каким-нибудь образом выделена некоторая совокупность кортежей $< a_1, a_2, ... , a_n >$, где $a_i \in A_i$, i=1,2,...,n, то говорят, что определено n-местное или n-арное отношение на системе множеств A_1, A_2, ... , A_n. Элементы a_1, a_2, ... , a_n находятся в данном отношении, если кортеж $< a_1, a_2, ... , a_n >$ принадлежит выделенной совокупности.

Другими словами, любое подмножество декартова произведения $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ задает некоторое n-местное отношение. Отношение обозначают, как правило, малыми греческими буквами. Если элементы a_1, a_2, ... , a_n находятся в отношении $\rho \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$, т.е. $< a_1, a_2, ... , a_n > \in \rho$, то пишут иногда $a_1 a_2 ... a_n \rho$. Так как отношения являются подмножествами $\prod_{i=1}^{n} A_i$, то для них имеют смысл операции, определенные над подмножествами.

Если n-местное отношение является подмножеством A^n, то говорят, что это отношение определено на множестве A.

Множество A, в котором определена некоторая совокупность отношений, называются моделью или реляционной системой.

Под n-местной (или n-арной) операцией на множестве A понимают любое отображение f: $A^n \xrightarrow{в} A$. Можно также сказать, что под n-местной операцией на множестве A понимается отображение, сопоставляющее каждому кортежу $<a_1, a_2, ... , a_n>$ из A определенный элемент из A, число n иногда называют арностью операции.

Заметим, что понятие операции является частным случаем понятия функции. Под n-местной функцией определенной на множестве A со значениями в множестве B понимают любое отображение f: $A \xrightarrow{в} B$.

0-арная операция фиксирует в множестве A некоторый определенный элемент.

В случае n=1 это будет любое преобразование множества A (отображение множества A в себя). Одноместные операции часто называют унарными операциями. Примерами унарных операций определенных на множестве действительных чисел являются сопоставления действительному числу его модуля, дробной части, целой части, квадрата числа и т.д.

Если n=2,получаем двухместные или бинарные операции. К ним относятся известные арифметические операции сложения, умножения, вычитания над действительными числами, сложение векторов, матриц, многочленов, умножение матриц, многочленов и т.п.

Если n=3,получаем трехместные или тернарные операции.

Если n=4,получаем четырехместные или кватернарные операции, и т.д.