ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Пример 1***.** Вычислить $\dfrac{(3^3 i^7 + 3^{2,5} i^6)^{30}}{(i^{27} + i^8)^{29}}$.

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{9^{30}(3(i^2)^3 i + \sqrt{3}(i^2)^3)^{30}}{((i^2)^{13} i + (i^2)^4)^{29}} = \frac{9^{30}(-3i - \sqrt{3})^{30}}{(-i+1)^{29}}.$$

Приведем комплексное число, стоящее в числителе к тригонометрической форме:

$z_1 = -3i - \sqrt{3}$, $\quad a = -\sqrt{3}$, $\quad b = -3$, $\quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$, $\quad \cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$,

$\sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно, $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$ и $z_1 = 2\sqrt{3}(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3})$. Воспользуемся формулой Муавра:

$$z_1^{30} = (2\sqrt{3}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}))^{30} = (2\sqrt{3})^{30}(\cos 30\frac{4\pi}{3} + i\sin 30\frac{4\pi}{3}) =$$
$$= 12^{15}(\cos 40\pi + i\sin 40\pi) = 12^{15}(\cos 0 + i\sin 0).$$

Совершенно аналогично преобразуем выражение, стоящее в знаменателе: приведем комплексное число, стоящее в знаменателе к тригонометрической форме:

$z_2 = -i + 1$, $\quad a = 1$, $\quad b = -1$, $\quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, $\quad \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad \sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

следовательно, $\varphi = \dfrac{7\pi}{4}$ и $z_2 = \sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4})$. Воспользуемся формулой Муавра:

$$z_2^{29} = (\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}))^{29} = (\sqrt{2})^{29}(\cos 29\frac{7\pi}{4} + i\sin 29\frac{7\pi}{4}).$$

После этих преобразований наше выражение принимает вид:

$$\frac{9^{30}12^{15}(\cos 0 + i\sin 0)}{(\sqrt{2})^{29}(\cos 29\frac{7\pi}{4} + i\sin 29\frac{7\pi}{4})} = \frac{3^{75}2^{16}(\cos 0 + i\sin 0)}{\sqrt{2}(\cos 29\frac{7\pi}{4} + i\sin 29\frac{7\pi}{4})}.$$

В последнем выражении воспользуемся формулой деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, тогда имеем:

$$\frac{3^{75}2^{16}}{\sqrt{2}}(\cos(0 - 29\frac{7\pi}{4}) + i\sin(0 - 29\frac{7\pi}{4})) = \frac{3^{75}2^{16}}{\sqrt{2}}(\cos\frac{203\pi}{4} - i\sin\frac{203\pi}{4}) =$$

$$=\frac{3^{75}2^{16}}{\sqrt{2}}(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4})=\frac{3^{75}2^{16}}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=-3^{75}2^{15}(1+i).$$

Пример 2. Решить уравнение $x^3+1+i=0$.

Решение. $x=\sqrt[3]{-i-1}$. Найдем тригонометрическую форму комплексного числа, стоящего под знаком корня:

$$z=-i-1,\qquad a=-1,\ b=-1,\ r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2},\qquad \cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

следовательно, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$ и $z=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$. Используя формулу извлечения корня n-ой степени из комплексного числа, получим:

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})}=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{5\pi/4+2\pi k}{3}+i\sin\frac{5\pi/4+2\pi k}{3})=$$

$$=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{5\pi+8\pi k}{12}+i\sin\frac{5\pi+8\pi k}{12}),\text{ где } k=\overline{0,2}.$$

Подставляя значения k в последнюю формулу, получим три различных корня:

$$k=0,\ x_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})=\frac{-1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{2}};$$

$$k=1,\ x_2=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12})=-\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})=-\frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt[3]{2}};$$

$$k=2,\ x_3=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{21\pi}{12}+i\sin\frac{21\pi}{12})=-\sqrt[6]{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=\frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}.$$

Пример 3. Решить уравнение $x^2+24-10i=0$.

Решение. $X^2=-24+10i$. Если $x=a+bi$, где a и b действительные числа, то $x^2=-24+10i=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$. Таким образом, сравнивая действительные и мнимые части, получим: $a^2-b^2=-24$, $ab=5$.

Решим полученную систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Из второго уравнения выразим b и подставим в первое, тогда

$b=5/a$, $a^2-25/a^2=-24$.

Обозначив $a^2=v$, получим квадратное уравнение $v^2+24v-25=0$, из которого находим $v_1=-25$, $v_2=1$. Но так как a - вещественное число, то $v\geq 0$, значит, $v=1$, т. е. $a=\pm 1$ и $b=\pm 5$. Тогда имеем два значения корня в алгебраической форме: $x_1=1+5i$, $x_2=-1-5i$.

Проверка: $x_1^2=x_2^2=1-25+10i=-24+10i$.

Пример 4. Найти и изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\mathrm{Im}(z^2)=-2$.

Решение. Пусть $z=x+iy$, тогда $\mathrm{Im}(z^2)=2xy=-2$, т. е. данным условием задается множество точек комплексной плоскости, лежащих на гиперболе, заданной уравнением $xy=-1$.

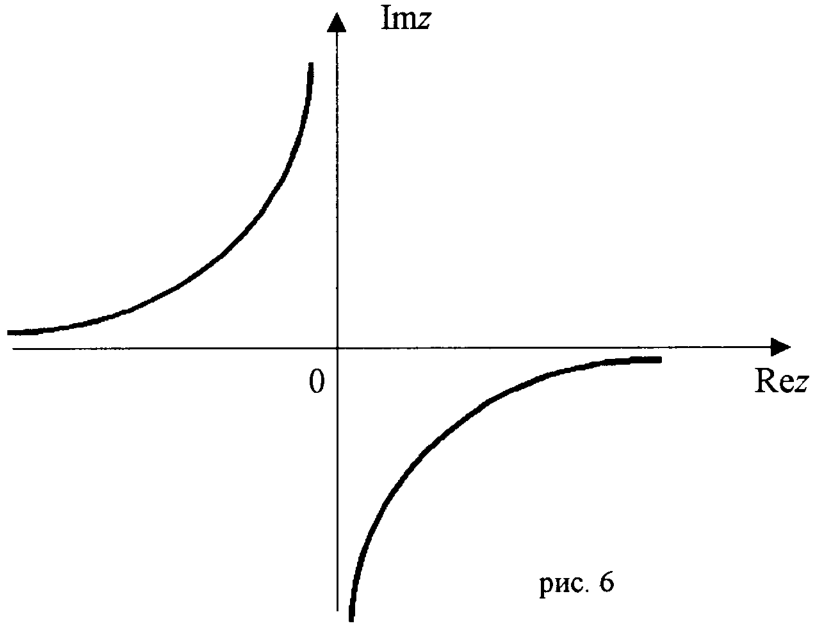

рис. 6

Пример 5. Найти и изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}z+\mathrm{Im}z=4$.

Решение. Пусть $z=x+iy$, тогда данное выражение принимает вид $x+y=4$, т. е. множеством точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}z+\mathrm{Im}z=4$, являются все точки, расположенные на прямой $x+y=4$. Изобразим это на графике:

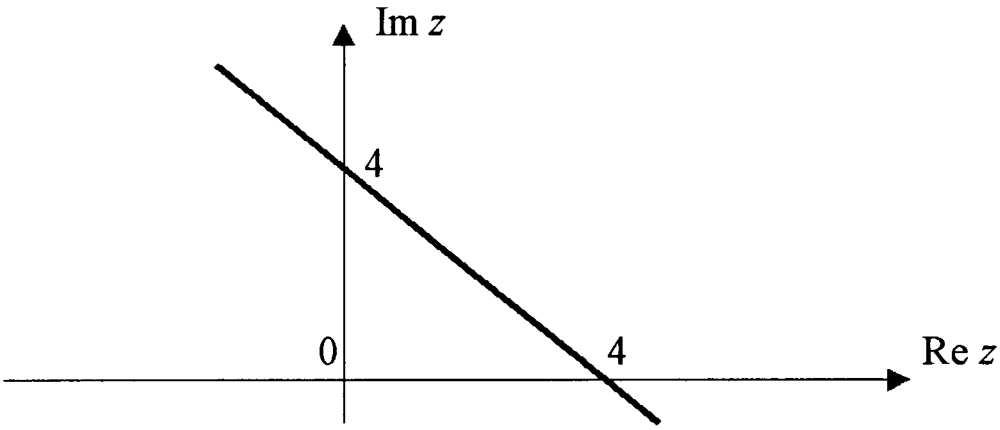

рис. 7

Пример 6. Найти и изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} [3/5] < |z| \le [5/3] \\ \arg z = [7/5]\cdot 20^0 \end{cases}.$$

Решение. Вычислив целую часть, получим следующую систему

$$\begin{cases} 0 < |z| \le 1 \\ \arg z = 20^0 \end{cases}.$$

Определим, какое множество точек комплексной плоскости задает неравенство системы:

$|z| > 0$ - это все точки комплексной плоскости, кроме точки 0 (Imz=0, Rez=0);

$|z| \le 1$ - это внутренность круга с центром в точке 0, радиуса r=1, включая границу круга, т. е. окружность $|z| = 1$.

Двойное неравенство $0 < |z| \le 1$, таким образом, задает множество точек комплексной плоскости, лежащих внутри круга $|z| \le 1$ и на его границе, но не включая центр круга (точку 0).

$\arg z = 20^0$ - это множество точек комплексной плоскости, лежащих на луче, исходящем из точки 0 и составляющем с положительной частью действительной оси Rez угол 20^0 по положительному направлению отсчета углов.

Таким образом, искомым множеством будет пересечение найденных множеств, т. е. часть луча, исходящего из точки 0 и составляющего с положительной частью действительной оси угол 20^0 по положительному направлению отсчета углов, содержащаяся внутри круга $|z| \le 1$, исключая саму точку 0. Изобразим это на графике:

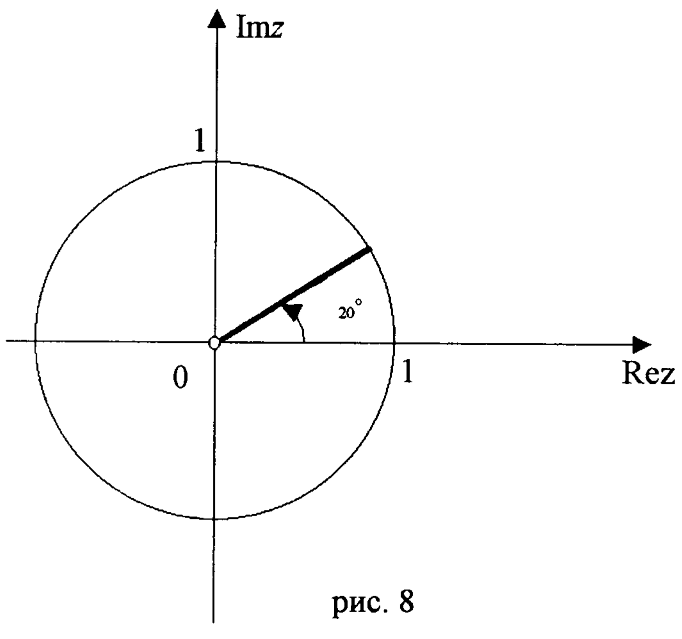

рис. 8

Пример 7. Выразить cos10x, sin10x через cos$x$ и sin$x$.

Решение. Рассмотрим сумму z= cos10x+$i$sin10x. Тогда по формуле Муавра, имеем: cos10x+$i$sin10x=(cos$x$+$i$sin$x$)^{10}. Используя формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}a^{n-1}b + \frac{n!}{2!(n-2)!}a^{n-2}b^2 + \frac{n!}{3!(n-3)!}a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n!}{(n-1)!1!}ab^{n-1} + b^n$$
,

получим

$$(\cos x + i\sin x)^{10} = \cos^{10} x + \frac{10!}{1!9!}i\cos^9 x\sin x + \frac{10!}{2!8!}\cos^8 x(i\sin x)^2 + \frac{10!}{3!7!}\cos^7 x(i\sin x)^3 +$$
$$+\frac{10!}{4!6!}\cos^6 x(i\sin x)^4 + \frac{10!}{5!5!}\cos^5 x(i\sin x)^5 + \frac{10!}{6!4!}\cos^4 x(i\sin x)^6 + \frac{10!}{7!3!}\cos^3 x(i\sin x)^7 +$$
$$+\frac{10!}{8!2!}\cos^2 x(i\sin x)^8 + \frac{10!}{9!1!}\cos x(i\sin x)^9 + (i\sin x)^{10} = \cos^{10} x + 10i\cos^9 x\sin x -$$
$$-45\cos^8 x\sin^2 x - 120i\cos^7 x\sin^3 x + 210\cos^6 x\sin^4 x + 252i\cos^5 x\sin^5 x - 210\cos^4 x\sin^6 x -$$
$$-120i\cos^3 x\sin^7 x + 45\cos^2 x\sin^8 x + 10i\cos x\sin^9 x - \sin^{10} x.$$

Выделим мнимую и действительную части, тем самым получим искомые ответы.

$$\operatorname{Im} z = \sin 10x = 10\cos^9 x\sin x - 120\cos^7 x\sin^3 x + 252\cos^5 x\sin^5 x + 10\cos x\sin^9 x -$$
$$-120\cos^3 x\sin^7 x.$$
$$\operatorname{Re} z = \cos 10x = \cos^{10} x - 45\cos^8 x\sin^2 x + 210\cos^6 x\sin^4 x - 210\cos^4 x\sin^6 x +$$
$$+45\cos^2 x\sin^8 x - \sin^{10} x.$$

Замечание. Аналогичным образом можно найти cosnx, sinnx, используя формулы Муавра и бинома Ньютона. Действительно:

cosnx+$i$sinnx=(cos$x$+$i$sin$x$)^n,

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n!}{2!(n-2)!}\cos^{n-2} x\sin^2 x + \frac{n!}{4!(n-4)!}\cos^{n-4} x\sin^4 x - \ldots,$$
$$\sin nx = \frac{n!}{1!(n-1)!}\cos^{n-1} x\sin x - \frac{n!}{3!(n-3)!}\cos^{n-3} x\sin^3 x + \frac{n!}{5!(n-5)!}\cos^{n-5} x\sin^5 x - \ldots.$$

Пример 8. Найти суммы

$S(x)$=sin$x$-sin$2x$+…+sin$99x$, $T(x)$=cos$x$-cos$2x$+…+cos$99x$.

Решение. Вычислим сумму $T(x)+iS(x)$.

$T(x)+iS(x)$=(cos$x$+$i$sin$x$)-(cos$2x$+$i$sin$2x$)+…+(cos$99x$+$i$sin$99x$).

По формуле Муавра имеем:

$T(x)+iS(x)$=(cos$x$+$i$sin$x$)-(cos$x$+$i$sin$x$)^2+…+(cos$x$+$i$sin$x$)^{99}.

Обозначим cos$x$+$i$sin$x$=a и воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии, тогда

$$T(x) + iS(x) = a - a^2 + \ldots + a^{99} = \frac{a(1-(-a)^{99})}{1-(-a)} = \frac{a+a^{100}}{1+a}.$$

Учитывая наше обозначение и используя формулу Муавра, получим:

$$T(x)+iS(x)=\frac{(\cos x+i\sin x)+(\cos x+i\sin x)^{100}}{1+\cos x+i\sin x}=\frac{\cos x+i\sin x+\cos 100x+i\sin 100x}{1+\cos x+i\sin x}=$$

$$=\frac{\cos x+i\sin x+\cos 100x+i\sin 100x}{2\cos^2(x/2)+i2\sin(x/2)\cos(x/2)}=\frac{\cos x+i\sin x+\cos 100x+i\sin 100x}{2\cos(x/2)(\cos(x/2)+i\sin(x/2))}.$$

Умножим в полученном равенстве числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю и раскроем скобки, используя формулу умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$T(x)+iS(x)=\frac{(\cos x+i\sin x+\cos 100x+i\sin 100x)(\cos(x/2)-i\sin(x/2))}{2\cos(x/2)(\cos(x/2)+i\sin(x/2))(\cos(x/2)-i\sin(x/2))}=$$

$$=\frac{(\cos x+i\sin x+\cos 100x+i\sin 100x)(\cos(-x/2)+i\sin(-x/2))}{2\cos(x/2)(\cos(x/2)+i\sin(x/2))(\cos(x/2)-i\sin(x/2))}=$$

$$=\frac{\cos(x/2)+i\sin(x/2)+\cos(199x/2)+i\sin(199x/2)}{2\cos(x/2)(\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2))}=\frac{\cos(x/2)+\cos(199x/2)}{2\cos(x/2)}+i\frac{\sin(x/2)+\sin(199x/2)}{2\cos(x/2)}.$$

Преобразуем полученное выражение, используя формулы суммы косинусов двух аргументов и суммы синусов двух аргументов, тогда

$$T(x)+iS(x)=\frac{2\cos((x/2+199x/2)/2)\cos((x/2-199x/2)/2)}{2\cos(x/2)}+$$

$$+i\frac{2\sin((x/2+199x/2)/2)\cos((x/2-199x/2)/2)}{2\cos(x/2)}=\frac{\cos 50x\cos(99x/2)}{\cos(x/2)}+i\frac{\sin 50x\cos(99x/2)}{\cos(x/2)}.$$

Таким образом, мы получили следующие значения искомых сумм:

$$T(x)=\frac{\cos 50x\cos(99x/2)}{\cos(x/2)}\ \text{и}\ S(x)=\frac{\sin 50x\cos(99x/2)}{\cos(x/2)}.$$