Матрицы и системы линейных уравнений

Введем понятие матрицы. Назовем матрицей таблицу, представляющую собой несколько n-мерных строк, записанных одна под другой:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет m строк и n столбцов. Говорят, что ее размер $m \times n$. Матрицу размера $n \times n$ называют квадратной матрицей порядка n.

Квадратную матрицу порядка n вида:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называют единичной.

<u>Определение</u> 1. Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A называется ее рангом.

Имеется правило вычисления ранга матрицы (метод окаймляющих миноров): при вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k-го порядка $|M|$, отличный от нуля, то вычисляют лишь миноры (k+1)-порядка, окаймляющие минор $|M|$ и если все они равны нулю, то ранг матрицы A равен k.

Также ранг матрицы можно вычислить приведением к ступенчатому виду.

<u>Определение</u> 2. Ступенчатой называется матрица A, обладающая следующими свойствами:

1) если k-я строка нулевая, то (k+1)-я строка также нулевая.
2) Если первые ненулевые элементы k-й и (k+1)-й строк располагаются в столбцах с номерами P_k и P_{k+1} соответственно, то $P_k < P_{k+1}$.

Наглядно эти свойства означают, что ниже нулевой строки могут располагаться лишь нулевые строки, а все элементы, располагающиеся влево и вниз от первого ненулевого элемента какой-нибудь строки, являются нулями. Происхождение названия нетрудно объяснить, рассматривая, например, ступенчатую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Определение</u> 3. Будем рассматривать преобразования, называемые элементарными преобразованиями строк (столбцов) матриц:

1. Перемена местами двух строк (столбцов) матрицы.
2. Прибавление к какой–либо строке (столбцу) матрицы другой ее строки (столбца), умноженной на некоторое число.
3. Умножение некоторой строки (столбца) на отличное от нуля число.

<u>Теорема</u> 1. Всякую матрицу конечным числом элементарных преобразований строк (столбцов) можно превратить в ступенчатую матрицу.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу строк матрицы. Если имеется всего одна строка, то матрица уже ступенчатая, ибо оба условия, входящие в определение ступенчатой матрицы, выполнены тривиальным образом (ввиду отсутствия второй строки). Пусть теперь матрица A содержит m строк, где m?2. Предположим, что матрицу с числом строк, меньшим m, можно привести к ступенчатому виду. Если матрица A состоит из нулей, то она ступенчатая. Если A ненулевая, то в ней есть хоть один ненулевой элемент. Ненулевой элемент располагается в какой-то строке. Значит, в нашей матрице есть ненулевые строки. Выберем ту, в которой первый ненулевой элемент располагается в столбце с наименьшим номером, скажем, с номером k_1. Применив преобразование первого типа, перенесем эту строку на первое место. Тогда матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & b_{1k_1} & ... \\ 0 & ... & 0 & b_{2k_1} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & b_{mk_1} & ... \end{pmatrix},$$

причем $b_{1k_1} \neq 0$. Теперь будем применять преобразования второго типа: ко второй строке прибавим первую, умноженную на $-\frac{b_{2k_1}}{b_{1k_1}}$, к третьей строке – первую, умноженную на $-\frac{b_{3k_1}}{b_{1k_1}}$ и т.д. После применения m-1 таких элементарных преобразований добьемся того, что в k_1-м столбце всюду, кроме первой строки, будут нули:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & b_{1k_1} & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... \end{pmatrix}.$$

Отбросим первую строку. Оставшаяся матрица имеет m-1 строку. По индуктивному предположению ее можно привести к ступенчатому виду

$$G=\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 0 & \\ ... & ... & ... & ... & D \\ 0 & ... & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пусть первые ненулевые элементы строк ступенчатой матрицы G располагаются в столбцах с номерами k_2, … , k_r. Тогда $k_2< \ldots <k_r$, по определению ступенчатой матрицы. Но осуществляя элементарные преобразования уменьшенной матрицы, можно считать, что мы делаем элементарные преобразования матрицы C не использующие первой строки. Поскольку при выполнении этих элементарных преобразований нули, стоявшие в первых k_1 столбцах матрицы C, не могли исчезнуть, то $k_1<k_2$. Таким образом, мы получили матрицу

$$H=\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & b_{1k_1} \ldots & \ldots & \ldots \\ ... & ... & ... & ... & D & \\ 0 & ... & 0 & 0 & & \end{pmatrix},$$

удовлетворяющую свойству (2) из определения ступенчатой матрицы. Если же в H имеется нулевая строка, то она не совпадает с первой строкой, так как $b_{1k_1} \neq 0$, и, значит, лежит в матрице G. Но G ступенчатая. Следовательно, ниже нулевой строки лежат нулевые строки. Таким образом, H – ступенчатая матрица.

Теорема 2. Если от матрицы A к матрице B можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то от B к A также можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк.

Доказательство. Если для перехода от A к B использовано одно элементарное преобразование первого типа, то утверждение очевидно. Допустим, что от A к B перешли, используя одно элементарное преобразование второго типа, т. е. (i-я строка в B)=(i-я строка в A)+λ(j-я строка в A), а каждая из остальных строк матрицы B совпадает с соответствующей строкой матрицы A. Таким образом, $b_{ik}=a_{ik}+\lambda a_{jk}$ для каждого номера k. Если теперь к i-й строке матрицы B прибавить ее j-ю строку, умноженную на $(-\lambda)$, то в получившейся после этого матрице на месте i-ой строки и k-го столбца окажется элемент

$$b_{ik}+(-\lambda)b_{jk}=(a_{ik}+\lambda a_{jk})+(-\lambda a_{jk})=a_{ik}.$$

Поскольку элементы получившейся матрицы, расположенные в строках, отличных от i-й, совпадают с соответствующими элементами матрицы A, то и вся она совпадает с A, так что справедливость теоремы в случае применения одного элементарного преобразования полностью доказана. Допустим теперь, что переход от A к B осуществлен с использованием t элементарных преобразований, где $t>1$. Обозначим через C матрицу, возникшую после применения первого из этих элементарных преобразований. Тогда от C к B перешли, используя $t-1$ элементарное преобразование. В силу индуктивного предположения, используя элементарные преобразования, можно перейти от B к C, а, как установлено в начале доказательства, точно так же можно перейти и от C к A. Таким образом, применение элементарных преобразований позволяет перейти от B к A, что и требовалось.

Теорема 3. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Сначала будет доказана следующая лемма.

Лемма. Если от матрицы A к матрице B можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то (ранг B)≤(ранг A).

Доказательство леммы будем вести индукцией по числу примененных элементарных преобразований. Допустим, что использовано только одно элементарное преобразование. Пусть (ранг A)=r. Для доказательства леммы достаточно убедиться, что всякий минор $|M|$ матрицы B порядка, больше чем r, равен нулю. Если от матрицы A к матрице B перешли переменой местами двух строк, то матрица M либо совпадает с некоторой подматрицей M' матрицы A, порядок которой больше чем r, либо отличается от такой подматрицы M' только порядком строк. Поскольку (ранг A)=r, то $|M'|=0$, а значит $|M|=\pm|M'|=0$. Допустим теперь, что переход к матрице B осуществлен прибавлением к i-й строке матрицы A ее j-й строки, умноженной на λ. Возможны три случая: 1) i-я строка не проходит через подматрицу M; 2) как i-я, так и j-я строки проходят через подматрицу M; 3) i-я строка проходит через подматрицу M, а j-я не проходит. В первом случае подматрица M совпадает с соответствующей подматрицей матрицы A и, следовательно, $|M|=0$. Во втором случае имеем

$$|M|=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1}+\lambda a_{jk_1} & \dots & a_{ik_s}+\lambda a_{jk_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} & \dots & a_{jk_s} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1} & \dots & a_{ik_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} & \dots & a_{jk_s} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=0,$$

ибо последний определитель является минором матрицы A. В третьем случае запишем

$$|M|=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1}+\lambda a_{jk_1} & \dots & a_{ik_s}+\lambda a_{jk_s} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1} & \dots & a_{ik_s} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} & \dots & a_{jk_s} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Но первый из этих определителей является минором матрицы A, а второй лишь порядком строк отличается от некоторого минора матрицы A. Следовательно, оба этих определителя равны нулю, откуда $|M|=0$. Таким образом, когда использовано лишь одно элементарное преобразование, лемма доказана. Допустим, что использовано m преобразований. Пусть C – матрица, полученная после осуществления m-1 преобразования. Учитывая индуктивное предположение, имеем

$$(\text{ранг } B)\le(\text{ранг } C)\le(\text{ранг } A),$$

что и требовалось.

Доказательство теоремы. Допустим, что от матрицы A к матрице B перешли конечным числом элементарных преобразований. Ввиду леммы (ранг B)?(ранг A). Но если элементарные преобразования позволяют перейти от A к B, то, согласно теореме 2, от B к A также можно перейти конечным числом элементарных преобразований. Еще раз применяя лемму, получаем, что (ранг A)≤(ранг B). Нужное равенство сразу следует из полученных неравенств.

Теорема 4. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство. Пусть ступенчатая матрица A содержит r ненулевых строк. Тогда, отметив ненулевые строки и столбцы, в которых располагаются первые ненулевые элементы этих строк, получим треугольную матрицу. Ее определитель равен произведению диагональных элементов, отличных от нуля, и, следовательно, отличен от нуля, так что матрица A содержит ненулевой минор порядка r. Всякий же минор большего порядка содержит нулевую строку и поэтому обращается в нуль. Таким образом, (ранг A)=r.

Теорема 5. (ранг A)=(ранг A'). (A' - A транспонированная)

Доказательство. Пусть (ранг A)=r. Рассмотрим в матрице A' произвольный минор порядка $s>r$. Пусть он является определителем подматрицы M. Тогда Mґ - подматрица матрицы A. Поскольку ее порядок больше r, то минор $|M'|=0$, а значит, и $|M|=0$. Таким образом, все миноры матрицы A', порядок которых больше r, обращаются в нуль. Следовательно, (ранг A')=r=(ранг A). Это же неравенство для матрицы A' дает (ранг A)=(ранг A'')=(ранг A'). Таким образом, (ранг A')=(ранг A)≤(ранг A'), т.е. (ранг A)=(ранг A').

Матрицы одного и того же размера можно складывать. Матрицу можно умножить на число, т.е. умножить все ее элементы на это число. Матрицу размера mЧn можно умножить на матрицу размера $n\times k$.

Определение 4. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) на матрицу $B=(b_{je})$ ($j=\overline{1,n}$ $e=\overline{1,k}$) называется такая матрица $C=(c_{ie})$, для которой каждый ее элемент c_{ie} из i–й строки и e–го столбца находится по формуле:

$$c_{ie}= a_{i1}\, b_{1e}+ a_{i2}\, b_{2e}+\ldots+a_{in}\, b_{ne}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{je}\,.$$

Произведение A на B обозначается AB.

Из определения произведения матриц A и B вытекает:

1) матрицу A лишь тогда можно умножить на матрицу B, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;

2) матрица произведения AB имеет столько строк, сколько первый сомножитель (матрица A), и столбцов столько, сколько их имеет второй сомножитель (матрица B).

Умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно, т.е. $AB\neq BA$. Равенство $AB=BA$ может выполняться лишь тогда, когда A и B – квадратные матрицы одинаковых порядков, однако оно может оказаться неверным уже для квадратных матриц второго порядка.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad т.е.\ \ AB\neq BA$$

Теорема 6. $(AB)C=A(BC)$ и $(AB)'=B'A'$.

Доказательство. Сначала убедимся, что из существования левой части каждого из этих равенств следует существование правой и наоборот. Например, если существует произведение $(AB)C$, то матрицы A и B имеют размеры $m\times n$ и $n\times p$ соответственно. Но тогда AB имеют размеры $m\times p$, откуда вытекает, что матрица C должна иметь размеры $p\times q$. После этого ясно, что произведение BC существует и имеет размерность $n\times q$. Но тогда существует и произведение $A(BC)$. При этом как $(AB)C$, так и $A(BC)$ имеют размеры $m\times q$. Далее полагаем $U=AB$, $V=BC$, $S=(AB)C$, $T=A(BC)$ и убеждаемся, что

$$s_{ij}=\sum_{l=1}^{p}u_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}a_{ik}b_{kl}c_{lj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\sum_{l=1}^{p}b_{kl}c_{lj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}v_{kj}=t_{ij}\,.$$

Этим доказано первое равенство. При этом мы используем следующую общеупотребительную символику. Всякая сумма вида $a_1+a_2+\ldots+a_n$ будет сокращенно обозначаться через $\sum_{i=1}^{n}a_i$. Если же рассматривается сумма, слагаемые которой a_{ij} снабжены двумя индексами, причем $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$, то можно сначала взять суммы элементов с фиксированным первым индексом, т.е. суммы $\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$, где $i=1, 2, \ldots, n$, а затем сложить все эти суммы. Мы получим тогда для суммы всех элементов a_{ij} запись

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\,.$$

Можно было бы, однако, вначале складывать слагаемые a_{ij} с фиксированным вторым индексом, а затем уже складывать полученные суммы. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,, \quad 10$$

т.е. в двойной сумме можно менять порядок суммирования.

Для доказательства второго положим $C=AB$ и $D=B'A'$. Тогда

$$c_{ij}' = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}' b_{ik}' = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}' a_{kj}' = d_{ij}\,,$$

что и требовалось.

<u>Теорема</u> 7. Умножение матрицы A слева (справа) на диагональную матрицу

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

равносильно умножению строк (столбцов) матрицы A на элементы d_1, d_2, … , d_n соответственно.

Доказательство. Если $DA=C$, то

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} a_{kj} = d_{ii} a_{ij} = d_i a_{ij}$$

для каждого i. Утверждение, касающееся столбцов, доказывается аналогично.

Следствие. Если

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то $AE=A$ и $EB=B$ всякий раз, когда умножение возможно.

<u>Определение</u> 5. Назовем элементарными матрицы, полученные из матрицы E применением одного элементарного преобразования. Это будут матрицы вида:

$$S(i,j)=\begin{pmatrix}
1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
0 & \dots & & & & & & & & & & \\
. & & 1 & & & & & & & & & \\
. & & & 0 & . & . & . & 1 & & & & \\
. & & & . & 1 & & & . & & & & \\
. & & & . & & \dots & & . & & & & \vdots \\
. & & & . & & & 1 & . & & & & \\
. & & & 1 & . & . & . & 0 & & & & \\
. & & & & & & & & 1 & & & \\
. & & & & & & & & & & \dots & \\
0 & & & & & \dots & & & & & & 1
\end{pmatrix},\quad
T(i,j,\lambda)=\begin{pmatrix}
1 & & & \dots & & & 0 \\
 & \dots & & & & & \\
 & & 1 & \dots & \lambda & & \\
\vdots & & . & \dots & . & & \vdots \\
 & & 0 & . & 1 & & \\
 & & & & & \dots & \\
0 & & & \dots & & & 1
\end{pmatrix},\quad
\begin{pmatrix}
1 & & & \dots & & & 0 \\
 & \dots & & & & & \\
 & & \lambda & & & & \\
\vdots & & & \dots & & & \vdots \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \dots & \\
0 & & & \dots & & & 1
\end{pmatrix}.$$

<u>Теорема</u> 8. Умножение матрицы A на матрицу $S(i, j)$ слева (справа) равносильно перемене местами i-й и j-й строк (i-го и j-го столбцов).

Доказательство. Положив $C=S(i, j)A$, будем иметь

$$c_{pq} = \sum_{k} s_{pk} a_{kq} = \begin{cases} s_{ij} a_{jq} = a_{jq}, & \text{если} \quad p=i \\ s_{ji} a_{iq} = a_{iq}, & \text{если} \quad p=j \\ s_{pp} a_{pq} = a_{pq}, & \text{если} \quad p \neq i, j. \end{cases} \quad 14$$

утверждение, касающееся столбцов, доказывается аналогично.

<u>Теорема</u> 9. Умножение матрицы A на матрицу $T(i,\ j,\ \lambda)$ ρлева (справа) равносильно прибавлению к i-й строке (j-му столбцу) матрицы A ее j-й строки (i-го столбца), умноженной на λ.

Доказательство. Положив $C=T(i, j, \lambda)A$, будем иметь

$$c_{pq}=\sum_k t_{pk}a_{kq}=\begin{cases} t_{ii}a_{iq}+t_{ij}a_{jq}=a_{iq}+\lambda a_{jq}, & если \quad p=i \\ t_{pp}a_{pq}=a_{pq}, & если \quad p\neq i. \end{cases}$$

утверждение, касающееся столбцов, доказывается аналогично.

<u>Теорема</u> 10. (ранг AB)≤(ранг A), (ранг B).

Доказательства. Допустим, что матрица A имеет размеры $m\times n$, а B – размеры $n\times p$. Докажем сначала, что (ранг AB)≤(ранг A). Это очевидно, если (ранг A)=m, ибо матрица AB имеет размеры $m\times p$. Если же (ранг A)=$r<m$, то приведем матрицу A к ступенчатому виду S, используя элементарные преобразования строк. Ввиду теорем 8 и 9 можем записать

$$S=U_k\ldots U_1A,$$

где $U_1, \ldots ,U_k$ – элементарные матрицы. Но тогда

$$SB= U_k\ldots U_1AB$$

и теоремы 8 и 9 позволяют заключить, что от матрицы AB к матрице SB можно перейти, осуществляя элементарные преобразования строк. В силу теоремы 3

$$(\text{ранг } SB)=(\text{ранг } AB).$$

Далее, из теорем 3 и 4 вытекает, что все строки матрицы S, начиная с (r+1)-й, нулевые. Простой подсчет показывает, что то же самое верно и для строк матрицы SB. Следовательно,

$$(\text{ранг } AB)=(\text{ранг } SB)=r=(\text{ранг } A).$$

Теперь, учитывая теоремы 5 и 6, а также доказанное неравенство, получаем

$$(\text{ранг } AB)=(\text{ранг } (AB)')=(\text{ранг } B'A')=(\text{ранг } B')=(\text{ранг } B).$$

<u>Определение</u> 6. Те матрицы А и В, для которых АВ=ВА, называются перестановочными.

<u>Определение</u> 7. Пусть A – квадратная матрица. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если $AA^{-1}= A^{-1}A=E$. Обратная матрица существует только для невырожденных матриц (матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля).

<u>Теорема</u> 11. Если A – квадратная матрица порядка n и $|A|\neq0$, то существует одна и только одна матрица B такая, что $AB=BA=E$.

Доказательство. Производя элементарные преобразования над строками, можно от матрицы A перейти к некоторой диагональной матрице D. Ввиду теорем 8 и 9

$$D= U_k\ldots U_1A,$$

где $U_1, \ldots ,U_k$ – элементарные матрицы. С другой стороны, согласно теореме 4, имеем

$$(\text{ранг } D)=(\text{ранг } A)=n,$$

т.е. $|D|$?0. Следовательно,

$$|D|=\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{vmatrix},$$

где все d_i отлично от 0. Положим

$$|U|=\begin{vmatrix} d_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n^{-1} \end{vmatrix}$$

и $B=UU_1\dots U_k$. Отсюда получим, что $BA=UU_k\dots U_1A=UD=E$.
Но $|A'|\neq 0$. В силу доказанного

$$CA'=E$$

для некоторой матрицы C. Ввиду теоремы 6

$$AC'=(CA')'=E'=E.$$

Отсюда

$$B=BE=BAC'=EC'=C',$$

т.е.

$$AB=E=BA.$$

Если $AX=E=XA$ для какой-нибудь матрицы X, то

$$X=XE=XAB=EB=B,$$

Чем доказывается единственность матрицы B.

Замечание 1. Рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 11,можно использовать и для получения следующего способа вычисления обратной матрицы: приписываем к матрице A слева единичную матрицу, затем с помощью элементарных преобразований строк приводим матрицу A к единичной, одновременно выполняя эти преобразования и над единичной матрицей. Матрица, полученная вместо единичной матрицы, и будет искомой матрицей A^{-1}: $\left(E|A\right)\to\left(A^{-1}|E\right)$.

Замечание 2. Обратную матрицу также можно найти по формуле:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ . & . & . & . \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}, \qquad (\Delta)$$

где через A_{ij} обозначено алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в матрице A. (Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется произведение $(-1)^{i+j}\left|M\right|$, где $\left|M\right|$ – определитель матрицы, полученной из элементов матрицы А, после вычеркивания i строки и j столбца – дополнительный минор к минору первого порядка a_{ij}).

Теорема 12. Если A и B – квадратные матрицы, то $|AB|=|A||B|$.

Доказательство. Допустим сначала, что $|A|=0$. Ввиду теоремы 10 (ранг AB)≤(ранг A)<(порядок A)=(порядок AB). Следовательно, $|AB|=0=|A||B|$, что и требовалось доказать. Теперь можно считать, что $|A|\neq 0$. Допустим, что A диагональна, т.е.

$$A=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая теорему 7 и свойство 5 определителя, получаем

$$|AB|=\begin{vmatrix} d_1b_{11} & ... & d_1b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ d_nb_{n1} & ... & d_nb_{nn} \end{vmatrix}=d_1\dots d_n|B|=|A||B|.$$

Переходя к общему случаю, вспомним, что элементарными преобразованиями строк матрицу A с ненулевым определителем можно привести к диагональному виду D. При этом $|A|=(-1)^k|D|$, где k – число осуществленных при этом приведении перемен местами строк. В силу теорем 8 и 9 имеем $D=UA$, где U – произведение элементарных матриц. Если к матрице AB применить те же самые элементарные преобразования, то получим матрицу $U(AB)$, причем $|U(AB)|=(-1)^k|AB|$. Учитывая, что в случае диагональной матрицы A теорема верна, имеем $|AB|=(-1)^k|U(AB)|= =(-1)^k|DB|= (-1)^k|D||B|=|A||B|$, что и требовалось.

Следствие. Если $|A|=0$, то матрица A не имеет обратной.

Доказательство. Действительно, если $|A|=0$ и $AB=E$, то $0=|A||B|=|AB|=|E|=1$, что невозможно.

Матрицы используют при изучении систем линейных уравнений.

Систему из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где a_{ij}, b_j – некоторые действительные числа, а x_1, x_2,…, x_n – неизвестные, можно записать с помощью матриц в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{или } AX=B.$$

Этой системе можно сопоставить две матрицы – A и $A=(A|B)$, матрицу A называют основной матрицей системы, а $Г$ – расширенной матрицей системы.

<u>Определение</u> 8. Решением системы линейных уравнений (1) называется такая система n чисел k_1, k_2,…, k_n, что каждое из уравнений (1) обращается в тождество после замены в нем неизвестных x_i соответствующими числами k_i.

<u>Определение</u> 9. Система линейных уравнений может не иметь ни одного решения и тогда она называется несовместной.

<u>Определение</u> 10. Если же система обладает решениями, то она называется совместной. Совместная система называется определенной, если она обладает одним – единственным решением и неопределенной, если решений будет бесконечно много.

<u>Определение</u> 11. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если всякое решение первой системы является решением второй системы и наоборот.

<u>Теорема</u> 13. Если от матрицы $Г$ к матрице $\widetilde{B}$ можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то соответствующие системы линейных уравнений эквивалентны.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Если от матрицы $Г$ к матрице $\widetilde{B}$ можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то всякое решение системы, соответствующей матрице $Г$, служит решением системы, соответствующей матрице $\widetilde{B}$.

Доказательство. Ясно, что лемму достаточно доказать для случая, когда применяется одно элементарное преобразование, ибо переход к общему случаю легко осуществляется индукцией. Если применено элементарное преобразование первого типа, т.е. переставлены местами строки, наши уравнения только меняются местами. Конечно, старые решения по-прежнему будут им удовлетворять. При элементарных преобразованиях второго типа к i-й строке прибавляем j-ю строку, умноженную на λ. Следовательно, i-я строка матрицы $\widetilde{B}$ имеет вид

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1}, \ \dots\ , a_{in}+\lambda a_{jn}|\ b_i+\lambda b_j).$$

Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n)$ – решение системы с матрицей $Г$, т.е. решение каждого из ее уравнений. Будет ли оно решением системы с матрицей $\widetilde{B}$? Сомнение может вызвать только i-е уравнение этой системы. Но

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1})\alpha_1+\ldots+(A_{in}+\lambda A_{jn})\alpha_n=(a_{i1}\alpha_1+\ldots+a_{in}\alpha_n)+\lambda(a_{j1}\alpha_1+\ldots+a_{jn}\alpha_n)=B_i+\lambda B_j.$$

Переходя к доказательству теоремы, заметим согласно лемме каждое решение системы $Г$ (т.е. системы, соответствующей матрице $Г$) служит решением системы $\widetilde{B}$. С другой стороны, в силу теоремы 2 от матрицы $\widetilde{B}$ к матрице $Г$ можно перейти с помощью элементарных преобразований. Следовательно, применив лемму еще раз, видим, что каждое решение системы $\widetilde{B}$ служит решением системы $Г$. Таким образом, эти системы эквивалентны.

<u>Теорема</u> 14 (Кронекера – Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Поскольку, согласно теоремам 1 и 13,от каждой системы линейных уравнений можно перейти к эквивалентной ей ступенчатой системе, а ранги матрицы системы и ее расширенной матрицы при этом меняться не будут, то достаточно установить справедливость теоремы 14 для ступенчатой системы. Для ступенчатой же системы, в силу теоремы 4, ранги матриц системы и ее расширенной матрицы равны тогда и только тогда, когда эти матрицы имеют одинаковое число ненулевых строк, или, что то же самое, тогда и только тогда, когда первый ненулевой элемент последней ненулевой строки расширенной матрицы не располагается в столбце свободных членов. Из анализа ступенчатой системы, ясно, что это имеет место тогда и только тогда, когда система совместна.

<u>Теорема</u> 15. Совместная система линейных уравнений от n неизвестных с матрицей A будет определенной тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен n.

Доказательство. В силу теорем 3 и 4 (ранг A)=n тогда и только тогда, когда данная система приводится к треугольному виду. С другой стороны, ступенчатая система имеет единственное решение в том и только в том случае, когда она треугольная.

Следствие. Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными обладает ненулевыми решениями тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы системы равен нулю.

<u>Определение</u> 12. Если дана система линейных уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2,\ldots, x_n$, то неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ можно объявить главными, если при любом задании остальных неизвестных значения этих неизвестных определяются однозначно. Эти остальные неизвестные можно объявить свободными.

<u>Определение</u> 13. Будем называть элементарными преобразованиями системы (1):

1. Перестановку двух уравнений местами;

2. Прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое число;

3. Умножение обеих частей любого уравнения на число, отличное от нуля.

Если к системе (1) будут несколько раз применены эти преобразования, то вновь полученная система уравнений остается эквивалентной исходной системе (т.е. они или обе несовместны, или же обе совместны и обладают одними и теми же решениями).

Применяя к системе (1) указанные преобразования, мы практически работаем с расширенной матрицей *Г* системы, т.е. мы выполняем элементарные преобразования строк в матрице *Г*. (Можно менять и столбцы местами, но при этом не забывать, что в уравнениях системы поменялись местами слагаемые; это единственное преобразование, которое можно применить к столбцам в этом случае).

<u>Теорема</u> 16. Если число уравнений однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет хотя бы одно ненулевой решение.

Доказательство. Приведем данную однородную систему, т. е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

к ступенчатому виду. Разумеется, она остается однородной. Ясно, что число главных неизвестных не может превысить числа строк. Следовательно, существуют свободные неизвестные, что обеспечивает существование ненулевых решений.

<u>Теорема</u> 17 (Основная теорема теории систем линейных уравнений). Пусть имеется совместная система (1), *Г* – расширенная матрица этой системы и ранг *Г* равен *r*. Тогда неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ можно объявить главными в том и только в том случае, когда $k=r$ и в столбцах матрицы *Г* с номерами $i_1, \ldots, i_k$ располагается ненулевой минор порядка *r*.

Доказательство. Допустим, что $k=r$ и что в столбцах с указанными номерами располагается ненулевой минор порядка *r*. Тогда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \ldots & a_{1i_r} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \ldots & a_{2i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \ldots & a_{mi_r} \end{pmatrix}$$

размера $m \times n$ равен *r*. В силу теорем 3 и 4, приведя эту матрицу к ступенчатому виду, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_r} \\ 0 & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{ri_r} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где $b_{1i_1}, b_{2i_2}, \ldots, b_{ri_r} \neq 0$. Применив те же самые элементарные преобразования к матрице *Г*, получим матрицу

$$\widetilde{B}=\left(\begin{array}{ccccccc|c} \dots & b_{1i_1} & \dots & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_r} & \dots & c_1 \\ \dots & 0 & \dots & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_r} & \dots & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{ri_r} & \dots & c_r \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & c_m \end{array}\right).$$

Подчеркнем, что эта запись не означает, что все строки матрицы $\widetilde{B}$, начиная с (r+1)-й, нулевые: в столбцах с номерами, отличными от $i_1, i_2, \dots, i_r$, могут встретиться ненулевые элементы, стоящие в этих строках. Однако на самом деле все строки матрицы $\widetilde{B}$, начиная с (r+1)-й, нулевые. Действительно, допустим, что это не так, т.е. $b_{pq} \neq 0$ для некоторых p и q, где r+1=p=m. Конечно $q \neq i_1, i_2, \dots, i_r$. Однако может случиться, что q=n+1, т.е. $b_{pq} = c_p$. Пусть $|M|$– минор матрицы $\widetilde{B}$ порядка r+1, расположенный в строках с номерами 1, 2, … , r, p и столбцах с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$, q. Переставляя, если нужно, столбцы этого минора, получим

$$|M| = \pm\begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_r} & b_{1q} \\ 0 & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_r} & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{ri_r} & b_{rq} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{bq} \end{vmatrix} = \pm b_{1i_1} \dots b_{ri_r} b_{pq} \neq 0 .$$

Но тогда

(ранг $Г$)=(ранг $\widetilde{B}$)=r+1,

что противоречит условию. Таким образом, система линейных уравнений, соответствующая матрице B, эквивалентна исходной системе и содержит r уравнений. Придавая неизвестным, отличным от $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$, произвольные значения и перенося их в правую часть, легко убедиться, что неизвестные $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ однозначно определяются одно за другим, начиная с последнего. Таким образом, их можно объявить главными.

Допустим теперь, что неизвестные $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ можно объявить главными. Положив остальные неизвестные равными нулю, придем к системе

$$\begin{cases} a_{1i_1} x_{i_1} + \dots + a_{1i_k} x_{i_k} = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{mi_1} x_{i_1} + \dots + a_{mi_k} x_{i_k} = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

имеющей единственное решение. В силу теоремы 15, ранг матрицы этой системы равен k. Следовательно, k=r и в столбцах $i_1, \dots, i_k$ располагается ненулевой минор порядка k. Допустим, что k<r. Заметим, что система (*) приводится к треугольному виду, и применим к исходной системе те же самые элементарные преобразования. Тогда расширенная матрица системы приобретает вид

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} \dots & b_{1i_1} & \dots & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_k} & \dots & & c_1 \\ \dots & 0 & \dots & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_k} & \dots & & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{ri_k} & \dots & & c_r \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & & c_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & & c_m \end{array}\right).$$

В силу теоремы Кронекера-Капелли, ранг матрицы системы равен $r>k$. Поэтому среди строк ($b_{i1},...,b_{in}$), где $k<i=m$, есть ненулевые. Следовательно, найдется $b_{pq} \neq 0$, где $p>k$. Если теперь положить равными нулю все неизвестные с номерами, отличными от $i_1, i_2, ..., i_k$, q, то получим $x_q = c_p / b_{pq}$. Следовательно, x_q не может быть взят произвольным, что противоречит возможности объявить $x_{i_1},...,x_{i_k}$ главными неизвестными. Следовательно, $k=r$.

<u>**Теорема**</u> **18.** Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, обладает решением и притом только одним.

Это решение можно получить по правилу Крамера $x_к=\dfrac{|A_k|}{|A|}$, где $к=\overline{1,n}$.

$|A|$ – определитель основной матрицы системы;

$|A_к|$ – получается из $|A|$ заменой к-го столбца в матрице А столбцом свободных членов.

Доказательство.Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть система (1) совместна и α_1, α_2, … , α_n – одно из ее решений. Справедливы, следовательно, равенства

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

Пусть j будет любым из чисел 1, 2, … , n. Умножим обе части первого из равенств (2) на A_{1j}, т.е. на алгебраическое дополнение элемента a_{1j} в определителе

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix},$$

равном определителю системы (2); обе части второго равенства умножим на A_{2j} и т.д., наконец, обе части последнего – на A_{nj}. Складывая, затем отдельно левые и отдельно правые части всех равенств, мы придем к следующему равенству:

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\ldots+a_{n1}A_{nj})\alpha_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\ldots+a_{n2}A_{nj})\alpha_2+\ldots+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj})\alpha_j+\ldots+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\ldots+a_{nn}A_{nj})\alpha_n=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}.$$

Коэффициентом при α_j в этом равенстве служит d, коэффициенты при всех остальных α будут равны нулю, ввиду того, что сумма произведений всех элементов некоторого столбца определителя на алгебраические дополнения соответственных элементов другого столбца равна нулю. А свободный член будет определителем, получающимся из определителя d после замены в нем j-го столбца столбцом из свободных членов системы (1). Если этот последний определитель мы обозначим через d_j, то наше равенство примет вид

$$d\alpha_j=d_j,$$

откуда, ввиду $d\neq 0$,

$$\alpha_j=\frac{d_j}{d}.$$

Этим доказано, что если система (1) совместна, то она обладает единственным решением.

$$\alpha_1=\frac{d_1}{d},\ \alpha_2=\frac{d_2}{d},\ \ldots,\ \alpha_n=\frac{d_n}{d}. \qquad (3)$$

Покажем теперь, что система чисел (3) на самом деле удовлетворяет системе уравнений (1), т.е. что система (1) совместна.

Подставим теперь в i-е уравнение системы (1) значения неизвестных (3). Так как левую часть i-го уравнения можно записать в виде $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ и так как $d_j=\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$, то мы получим:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{d_j}{d}=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}\Big)=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} b_k\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\Big).$$

Относительно этих преобразований заметим, что число $\frac{1}{d}$ оказалось общим множителем во всех слагаемых, и поэтому мы его вынесли за знак суммы; кроме того, после перемены порядка суммирований множитель B_k вынесен за знак внутренней суммы, так как от индекса внутреннего суммирования j он не зависит.

Мы знаем, что выражение $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}$ будет равно d при $k=i$ и равно 0 при всех других k. Таким образом, в нашей внешней сумме по k остается лишь одно слагаемое, а именно b_jd, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{d_j}{d}=\frac{1}{d}\cdot b_jd=b_j.$$

Этим доказано, что система чисел (3) действительно служит решением для системы уравнений (1).