§3 Определители n–го порядка.

Пусть дана квадратная матрица порядка n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

<u>Определение</u> 1. Определителем n–го порядка d, соответствующим матрице (1), называется алгебраическая сумма $n!$ членов, составленная следующим образом: членами служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце, причем член берется со знаком плюс, если его индексы составляют четную подстановку, и со знаком минус – в противоположном случае.

Для записи определителя n–го порядка d, соответствующего матрице (1), будем употреблять символ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Определитель n–го порядка можно записать в виде:

$$d = \sum \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega},$$

где $\alpha, \beta, \dots, \omega$ – некая перестановка чисел 1,2, … , n; перед слагаемыми ставится знак "+", если в этой перестановке число инверсий четное, и "–", если число инверсий нечетное.

Замечание 1. Понятие определителя вводится только для квадратных матриц.

<u>Определение</u> 2. *Транспонированием* матрицы (1) называется такое преобразование этой матрицы, при котором ее строки становятся столбцами с тем же самым номером, т.е. переход от матрицы (1) к матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Можно сказать, что транспонирование есть поворот матрицы (1) около главной диагонали. Соответственно говорят, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

получен транспонированием определителя (2).

Свойства определителей

1°. *Определитель не меняется при транспонировании.*

Доказательство. В самом деле, всякий член определителя (2) имеет вид

$$a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{n\omega}, \qquad (5)$$

где вторые индексы составляют некоторую перестановку из символов 1,2, …, n. Однако все множители произведения (5) и в определителе (4) остаются в разных строках и разных столбцах, т.е. (5) служит членом и для транспонированного определителя. Верно и обратное, и поэтому определители (2) и (4) состоят из одних и тех же членов. Знак члена (5) в определителе (2) определяется четностью подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

в определителе (4) первые индексы элементов указывают на номер столбца, вторые - на номер строки, поэтому члену (5) в определителе (4) соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \omega \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Подстановки (6) и (7) - в общем случае различные, но имеют, очевидно, одну и ту же четность, а поэтому член (5) имеет в обоих определителях один и тот же знак. Таким образом, определители (2) и (4) являются суммами одинаковых членов, взятых с одинаковыми знаками, т. е. равными друг другу.

Замечание 2. Из свойства 1° вытекает, что всякое утверждение о строках определителя справедливо и для его столбцов и обратно, т. е. что *в определителе строки и столбцы равноправны.*

2°. *Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю*.

Доказательство. Действительно, пусть все элементы i-й строки определителя являются нулями. В каждый член определителя должен войти множителем один элемент из i-й строки, поэтому в нашем случае все члены определителя равны нулю.

3°. *Если один определитель получен из другого перестановкой двух строк, то все члены первого определителя будут членами и во втором, но с обратным знаком, т. е. от перестановки двух строк определитель лишь меняет свой знак*.

Доказательство. В самом деле, пусть в определителе (2) переставляются i-я и j-я строки, $i \neq j$, а все остальные строки остаются на месте. Мы получим определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Если

$$a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{n\omega} \qquad (9)$$

есть член определителя (2), то все его множители и в определителе (8) остаются, очевидно, в разных строках и разных столбцах. Таким образом, определители (2) и (8) состоят из одних и тех же членов. Члену (9) в определителе (2) соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \mu & \dots & \eta & \dots & \omega \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

а в определителе (8) – подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \mu & \dots & \eta & \dots & \omega \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

так как, например, элемент $a_{i\mu}$ стоит теперь в j-й строке, но остается в старом μ-м столбце. Подстановка (11) получается из подстановки (10) путем одной транспозиции в верхней строке, т.е. имеет противоположную четность. Отсюда следует, что все члены определителя (2) входят в определитель (8) с обратными знаками, т.е. определители (2) и (8) отличаются друг от друга лишь знаком.

4°. *Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.*

Доказательство. В самом деле, пусть определитель равен числу d и пусть соответственные элементы его i-й и j-й строк ($i \neq j$) равны между собой. После перестановки этих двух строк определитель станет равен, ввиду свойства 3°, числу $-d$. Так как, однако, переставляются одинаковые строки, то определитель на самом деле не меняется, т. е. $d=-d$, откуда $d=0$.

5°. *Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число λ, то сам определитель умножится на λ.*

Доказательство. Пусть на λ умножены все элементы i-й строки. Каждый член определителя содержит ровно один элемент i-й строки, поэтому всякий член приобретает множитель λ, т. е. сам определитель умножается на λ.

6°. *Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.*

Доказательство. В самом деле, пусть элементы j-й строки определителя отличаются от соответствующих элементов i-й строки ($i \neq j$) одним и тем же множителем λ. Вынося этот общий множитель λ из j-й строки за знак определителя, мы получим определитель с двумя одинаковыми строками, равный нулю по свойству 4°.

7°. *Если все элементы i-й строки определителя n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых:*

$$a_{ij}=b_j+c_j,\ j=1,\dots,n,$$

то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-й, такие же, как и в заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, в другом - из элементов c_j.

Доказательство. Действительно, всякий член заданного определителя можно представить в виде:

$$a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{i\mu}\dots a_{n\omega}=a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots(b_\mu+c_\mu)\dots a_{n\omega}=a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots b_\mu\dots a_{n\omega}+a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots c_\mu\dots a_{n\omega}.$$

Собирая вместе первые слагаемые этих сумм (с теми же знаками, какие имели соответствующие члены в заданном определителе), мы получим, очевидно, определитель n-го порядка, отличающийся от заданного определителя лишь тем, что в i-й строке вместо элементов a_{ij} стоят элементы b_j. Соответственно вторые слагаемые составляют определитель, в j-й строке которого стоят элементы c_j. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \dots & b_n+c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение 3. Будем говорить, что i-я строка определителя есть *линейная комбинация* его остальных строк, если для всякой строки с номером j, j=1, … ,i-1, i+1, … , n, можно указать такое число λ_j, что, умножая j-ю строку на λ_j, а затем складывая все строки, кроме i-й (причем сложение строк следует понимать так, что складываются элементы всех этих строк в каждом столбце отдельно), мы получим i-ю строку. Некоторые из коэффициентов λ_j могут быть равными нулю, т.е. i-я строка будет на самом деле линейной комбинацией не всех, а лишь некоторых из оставшихся строк. В частности, если лишь один из коэффициентов λ_j отличен от нуля, мы получаем случай пропорциональности двух строк. Наконец, если строка состоит целиком из нулей, то она всегда будет линейной комбинацией остальных строк, - случай, когда все λ_j равны нулю.

8°. *Если одна из строк определителя есть линейная комбинация его других строк, то определитель равен нулю.*

Доказательство. Пусть, например, i-я строка будет линейной комбинацией s других строк, $1\le s\le n-1$. Всякий элемент i-й строки будет тогда суммой s слагаемых, а поэтому, применяя свойство 7°, мы представим наш определитель в виде суммы определителей, в каждом из которых i-я строка будет пропорциональна одной из других строк. По свойству 6° все эти определители будут равны нулю; равен нулю, следовательно, и заданный определитель.

9°. *Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.*

Доказательство. Пусть, в самом деле, к i-й строке определителя d прибавляется j-я строка, $i\neq j$, умноженная на число λ, т.е. в новом определителе всякий элемент i-й строки имеет вид $a_{is}+\lambda a_{js}$, s=1, 2, … , n. Тогда, на основании свойства 7°, этот определитель равен сумме двух определителей, из которых первый есть d, а второй содержит две пропорциональные строки и поэтому равен нулю.

Замечание 3. Определитель не меняется и при вычитании из одной его строки другой строки, умноженной на некоторое число. Определитель не меняется, если к одной из его строк прибавляется любая линейная комбинация других строк.

<u>Определение</u> 4. Пусть дан определитель d порядка n. Берем целое число k, удовлетворяющее условию $1 \le k \le n-1$, и в определителе d выберем произвольные k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, составляют матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется *минором k-го порядка* определителя d.

<u>Определение</u> 5. Пусть в определителе d n-го порядка взят минор $|M|$ k-го порядка. Если мы вычеркнем те строки и столбцы, на пересечении которых стоит этот минор, то остается минор $|M'|$ $(n-k)$-го порядка, который называется *дополнительным минором* для минора $|M|$.

<u>Определение</u> 6. *Алгебраическим дополнением* минора $|M|$ называется его дополнительный минор $|M'|$, взятый со знаком плюс или минус в зависимости от того, четна или нечетна сумма номеров всех строк и столбцов, в которых расположен минор $|M|$ или, иными словами, число $(-1)^{s_M}|M'|$, где s_M - сумма номеров всех строк и столбцов, в которых расположен минор $|M|$.

<u>Теорема</u> 1. *Произведение любого минора $|M|$ k-го порядка на его алгебраическое дополнение в определителе d является алгебраической суммой, слагаемые которой, получающиеся от умножения членов минора $|M|$ на взятые со знаком $(-1)^{s_M}$ члены дополнительного минора $|M'|$, будут некоторыми членами определителя d, причем их знаки в этой сумме совпадают с теми знаками, с какими они входят в состав определителя.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы начнем со случая, когда минор $|M|$ расположен в левом верхнем углу определителя:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & M & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ & & & & & \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т. е. в строках с номерами 1,2, …,k и в столбцах с такими же номерами. Тогда минор $|M'|$ будет занимать правый нижний угол определителя. Число s_M в этом случае будет четным:

$$s_M = 1+2+\ldots+k+1+2+\ldots+k = 2(1+2+\ldots k),$$

поэтому алгебраическим дополнением для $|M|$ служит сам минор $|M'|$.

Берем произвольный член

$$a_{1\alpha}a_{2\beta}\ldots a_{n\omega} \qquad (12)$$

минора $|M|$; его знак в $|M|$ будет $(-1)^l$, если l есть число инверсий в подстановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha & \beta & \ldots & \omega \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Произвольный член

$$a_{k+1,\beta_{k+1}}a_{k+2,\beta_{k+2}}\ldots a_{n\beta_n} \qquad (14)$$

минора $|M'|$ имеет в этом миноре знак $(-1)^{l'}$, где l' есть число инверсий в подстановке

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \ldots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Перемножая члены (12) и (14), мы получим произведение n элементов

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{k\alpha_k}a_{k+1,\beta_{k+1}}a_{k+2,\beta_{k+2}}\ldots a_{n\beta_n}, \qquad (15)$$

расположенных в разных строках и разных столбцах определителя; оно будет, следовательно, членом определителя d. Знак члена (15) в произведении $|M||M'|$ будет произведением знаков членов (12) и (14), т.е. $(-1)^l(-1)^{l'}=(-1)^{l+l'}$. Такой же знак имеет, однако, член (15) и в определителе d. Действительно, нижняя строка подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & k+2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \ldots & \beta_n \end{pmatrix},$$

составленной из индексов этого члена, содержит лишь $l+l'$ инверсий, так как никакое α ни с одним β не может составить инверсию: все α не больше k, все β не меньше $k+1$.

Этим доказан рассматриваемый нами частный случай теоремы. Переходим к рассмотрению общего случая, т.е. предположим, что минор $|M|$ расположен в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и в столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots j_k$, причем

$$i_1<i_2<\ldots<i_k,\ j_1<j_2<\ldots<j_k.$$

Переставляя строки и столбцы определителя, передвинем минор $|M|$ в левый верхний угол, причем так, чтобы дополнительный минор не изменился. Для этого переставим i_1-ю строку с (i_1-1)-й строкой, затем с (i_1-2)-й и т. д., пока i_1-я строка не займет место первой строки, при этом строки будем переставлять i_1-1 раз. Будем затем последовательно переставлять i_2-ю строку со строками, расположенные над нею, пока она не расположится непосредственно под i_1-й строкой, т. е. на месте, которое до начала всех преобразований занимала вторая строка, при этом строки будем переставлять (i_2-2) раза. Аналогичным образом i_3-ю строку мы передвинем на место третьей строки и т. д., пока i_k-я строка не окажется на месте k-й строки. Всего при этом будем совершать

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k)=(i_1+i_2+\ldots+ i_k)-(1+2+..+k)$$

транспозиций строк.

Минор $|M|$ расположен уже в первых строках нового определителя. Будем теперь последовательно переставлять столбцы определителя: n-й со всеми ему предшествующими, пока он не займет первого места, затем n-1-й, пока он не займет второго места, и т. д. Всего столбцы будут переставлены

$$(j_1+j_2+\ldots+j_k)-(1+2+...+k)$$

раз.

После всех этих преобразований мы приходим к новому определителю d ', в котором минор $|M|$ занимает левый верхний угол. Так как мы переставляли лишь соседние строки или столбцы, то взаимное расположение строк и столбцов, содержащих в определителе d минор $|M'|$, остается без изменения, а потому дополнительным к минору $|M|$ в определителе d ' остается минор $|M'|$, занимающий, однако, уже правый нижний угол. Как доказано выше, произведение $|M||M'|$ является суммой некоторого количества членов определителя d ', взятых с теми же знаками, с какими они входят в d '. Однако определитель d ' получен из определителя d путем

$$[(i_1+ i_2+\ldots+ i_k)-(1+2+\ldots+k)]+[(j_1+ j_2+\ldots+ j_k)-(1+2+\ldots+k)]= s_M -2(1+2+..+k)$$

транспозиций строк и столбцов. Как мы знаем из свойств определителей, члены определителя d' отличаются от соответственных членов определителя d лишь знаком $(-1)^{s_M}$ (четное число 2(1+2+…+k) не будет влиять на знак). Отсюда следует, что произведение $(-1)^{s_M}|M||M'|$ состоит из некоторого количества членов определителя d, взятых с такими же знаками, какие они имеют в этом определителе.

Теорема 2 (о разложении определителя). Определитель d равен сумме произведений всех элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения:

$$d=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

Доказательство. Введём следующие обозначения: если a_{ij} - элемент определителя d, то через $|M_{ij}|$ обозначим дополнительный минор этого элемента, т. е. минор (n-1)-го порядка, получающийся после вычеркивания из определителя i-й строки и j-го столбца.

Далее, через A_{ij} обозначим алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, т. е.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|.$$

Как доказано в теореме 1, произведение $a_{ij}A_{ij}$ является суммой нескольких членов определителя d, входящих в эту сумму с теми же знаками, с какими они входят в состав определителя. Легко подсчитать число этих членов: оно равно числу членов в миноре M_{ij}, т.е. равно (n-1)!.

Выбираем теперь любую i-ю строку определителя d и берем произведение каждого элемента этой строки на его алгебраическое дополнение:

$$a_{i1}A_{i1},\ a_{i2}A_{i2},\ldots a_{in}A_{in}. \qquad (16)$$

Никакой член определителя d не может войти в состав двух разных из числа произведений (16): все члены определителя, входящие в произведение $a_{i1}A_{i1}$, содержат из i-й строки элемент a_{i1} и поэтому отличаются от членов, входящих в произведение $a_{i2}A_{i2}$, т. е. содержащих из i-й строки элемент a_{i2} и т. д.

С другой стороны, общее число членов определителя d, входящих во все произведения (16) есть:

$$(n\text{-}1)!n=n!$$

т. е. этим исчерпываются вообще все члены определителя d.

<u>Теорема</u> 3 (Лапласа). *Пусть в определителе d порядка n произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1\le k\le n\text{-}1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равна определителю d.*

Доказательство. Произведение любого минора k-го порядка $|M|$, расположенного в выбранных строках, на его алгебраическое дополнение состоит из $k!(n\text{-}k)!$ членов, так как минор k-го порядка $|M|$ состоит из $k!$ членов, а его алгебраическое дополнение, отличаясь, возможно, лишь знаком от минора порядка $n\text{-}k$, содержит $(n\text{-}k)!$ членов. С другой стороны, число миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных нами строках, равно числу

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Умножив $k!(n\text{-}k)!$ на $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, мы получаем, что сумма произведений всех миноров k-го порядка из выбранных строк на их алгебраическое дополнение состоит из $n!$ слагаемых. Таково же, однако, и общее число членов определителя d. Теперь остается доказать, что всякий член определителя d входит хотя бы один раз (а тогда и точно один раз) в рассматриваемую сумму произведений миноров на их алгебраические дополнения.

Пусть

$$a_{1\alpha}a_{2\beta}\ldots a_{n\omega}, \qquad (17)$$

произвольный член определителя d. Возьмем отдельно произведение тех элементов из этого члена, которые принадлежат к выбранным нами строкам с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Это будет произведение

$$a_{i_1\alpha_{i_1}}a_{i_2\alpha_{i_2}}\ldots a_{i_k\alpha_{i_k}}, \qquad (18)$$

k множителей стоящих в k различных столбцах, а именно, в столбцах с номерами $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_k}$. Эти номера столбцов вполне определяются, следовательно, заданием члена (17). Если мы обозначим через $|M|$ минор k-го порядка, стоящий на пересечении столбцов с этими номерами $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_k}$ и выбранных ранее строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$, то произведение (18) будет одним из членов минора $|M|$, а произведение всех элементов из члена (17), не вошедших в (18), членом его дополнительного минора. Для того, чтобы получить взятый нами член определителя с тем знаком, какой он имеет в определителе, остается, заменить дополнительный минор алгебраическим дополнением.

Следствие из теоремы Лапласа (об определителе с нулями в правом верхнем углу). Если A и B - квадратные матрицы, то

$$\left|\begin{array}{c|ccc} & 0 & \dots & 0 \\ A & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ C & & B & \end{array}\right| = |A||B|.$$