§2 Комплексные числа

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Комплексными числами называются числа вида $z=a+bi$, где a и b - действительные числа, i - некоторый символ, квадрат которого равен -1, т. е. $i^2=-1$. Такая форма записи комплексного числа называется алгебраической формой комплексного числа. Число a называется действительной частью числа z и обозначается Rez, bi - его мнимой частью, а b - коэффициентом при мнимой единице и обозначается Imz. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами, называется комплексной плоскостью. Ось абсцисс этой плоскости называется действительной осью, а ось ординат - мнимой осью. Числом, сопряженным числу $z=a+bi$ называется число $\overline{z}=a-bi$.

Сложение, умножение, вычитание и деление комплексных чисел, записанных в виде $a+bi$, производятся следующим образом:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$

$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i;$

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i;$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\,.$$

Мы можем сказать, что при сложении комплексных чисел складываются отдельно их действительные части и отдельно их мнимые части; аналогичное правило имеет место и для вычитания. Последнюю из этих формул нет необходимости запоминать; следует лишь помнить, что ее можно легко вывести. Действительно,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\,.$$

Примеры.

$(1+2i)+(3-4i)=(1+3)+(2-4)i=4-2i;$

$(2-5i)-(4-6i)=(2-4)+(-5+6)=-2+i;$

$(1+3i)(2-2i)=(1\cdot 2-3\cdot(-2))+(1\cdot(-2)+3\cdot 2)i=8+4i;$

$$\frac{3+5i}{1+i}=\frac{(3+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{8+2i}{2}=4+i\,.$$

Изображение комплексных чисел точками плоскости приводит к естественному желанию иметь геометрическое истолкование операций, определенных для комплексных чисел.

Для сложения такое истолкование может быть получено без затруднений. Пусть даны числа $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$. Соединяем соответствующие им точки (a,b) и (c,d) отрезками с началом координат и строим на этих отрезках, как на сторонах, параллелограмм (рис. 1). Четвертой вершиной этого параллелограмма будет, очевидно, точка $(a+c,b+d)$. Таким образом, *сложение комплексных чисел геометрически выполняется по правилу параллелограмма, т. е. по правилу сложения векторов, выходящих из начала координат.* Далее, *число, противоположное числу $z=a+bi$, будет точкой комплексной плоскости, симметричной с точкой z относительно начала координат* (рис. 2). Отсюда без труда может быть получено геометрическое истолкование вычитания.

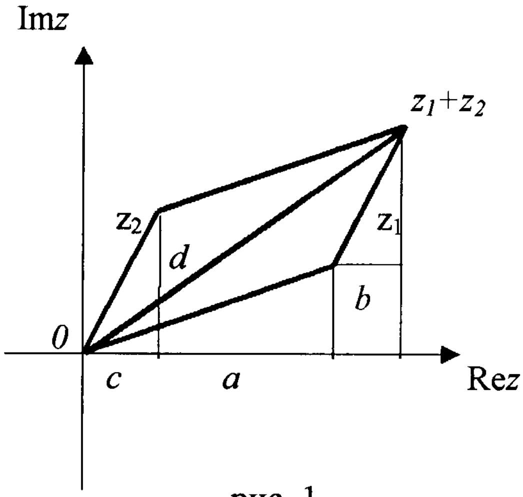

рис. 1

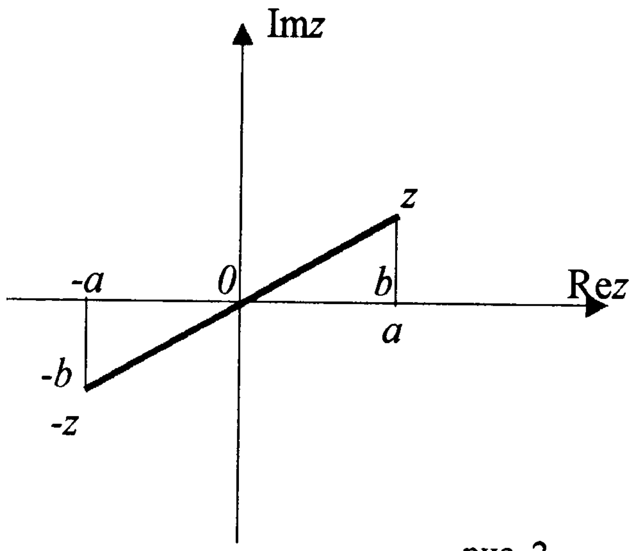

рис. 2

Геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел станет ясным лишь после того, как мы введем для комплексных чисел новую запись, отличную от употреблявшейся нами до сих пор. Запись числа z в виде $z=a+bi$ использует декартовы координаты точки, соответствующей этому числу. Положение точки на плоскости вполне определяется. Однако, также заданием ее полярных координат: расстояния r от начала координат до точки и угла φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на эту точку (рис. 3).

Длина вектора, изображающего комплексное число на плоскости, называется модулем этого числа, обозначается буквой r и обозначается $|z|$. Число r является неотрицательным действительным числом, причем оно равно нулю лишь для точки 0. Для z, лежащего на действительной оси, т. е. являющегося действительным числом, число r будет абсолютной величиной z.

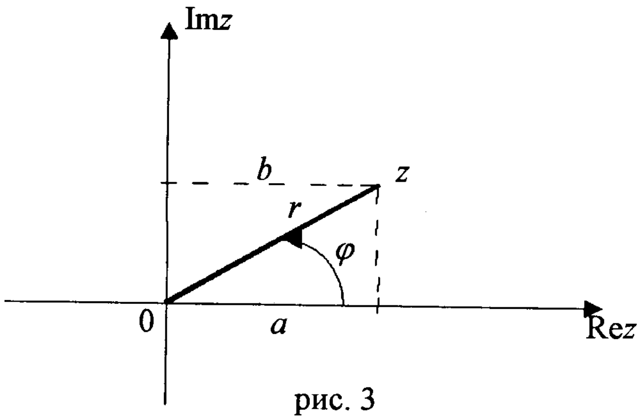

рис. 3

Угол φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на точку z называется аргументом комплексного числа z и обозначается arg$z$. Угол φ может принимать любые действительные значения, как положительные, так и отрицательные, причем положительные углы должны отсчитываться против часовой стрелки. Аргумент не определен лишь для числа 0, это число вполне определяется, однако равенством $|0| = 0$.

Аргумент комплексного числа является естественным обобщением знака действительного числа. В самом деле, аргумент положительного действительного числа равен 0, аргумент отрицательного действительного числа равен π; на действительной оси из начала координат выходят лишь два направления и их можно различать двумя символами + и -, тогда как на комплексной плоскости направлений выходящих из точки 0, бесконечно много и различаются они уже углом, составляемым ими с положительным направлением действительной оси.

Между декартовыми и полярными координатами точки существует следующая связь, справедливая при любом расположении точек на плоскости:

$$a=\cos\varphi,\ b=\sin\varphi. \qquad (1)$$

Отсюда

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (2)$$

Применим формулы (1) к произвольному комплексному числу z:

$$z=a+bi=r\cos\varphi+r(\sin\varphi)i,$$

или

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (3)$$

Обратно, пусть число $z=a+bi$ допускает запись вида $z=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$, где r_0 и φ_0 - некоторые действительные числа, причем $r_0\geq 0$. Тогда $r_0\cos\varphi_0=a$, $r_0 \sin\varphi_0=b$, откуда $r_0=\sqrt{a^2+b^2}$, т. е., ввиду (2), $r_0 = |z|$. Отсюда, используя (1), получаем: $\cos\varphi_0=\cos\varphi$, $\sin\varphi_0=\sin\varphi$, т. е. $\varphi_0=\arg z$. Таким образом, *всякое комплексное число z однозначным образом записывается в виде (3), где* $r = |z|$, $\varphi=\arg z$ (причем аргумент φ определен лишь с точностью до слагаемых, кратных 2π). Эта запись числа z называется его *тригонометрической формой*, где $r = |z|$, а аргумент φ вычисляется из равенств:

$$\cos\varphi=a/r,\ \sin\varphi=b/r. \qquad (4)$$

Формулы умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме имеют следующий вид:

$$z_1z_2=(r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi))(r_2(\cos\psi+i\sin\psi))=r_1r_2(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)), \qquad (5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_2(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)). \qquad (6)$$

Действительно, пусть комплексные числа z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме: $z_1=r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z_2=r_2(\cos\psi+i\sin\psi)$. Перемножим эти числа:

$$z_1z_2=(r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi))(r_2(\cos\psi+i\sin\psi))=$$
$$=r_1r_2(\cos\varphi\cos\psi+i\cos\varphi\sin\psi+i\sin\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)= r_1r_2(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)).$$

Аналогично для частного, где $r_2\neq 0$.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_2(\cos\psi+i\sin\psi)}=\frac{r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi-i\sin\psi)}{r_2(\cos^2\psi+\sin^2\psi)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi\cos\psi+i\sin\varphi\cos\psi-i\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\sin\psi)=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)).$$

Отсюда следует, что

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \tag{7}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{8}$$

Т. е. *модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, модуль частного двух комплексных чисел равен модулю делимого, деленному на модуль делителя.* Далее,

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2, \tag{9}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2. \tag{10}$$

Т. е. *аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей, аргумент частного двух комплексных чисел получается вычитанием аргумента делителя из аргумента делимого.*

Геометрический смысл умножения и деления выясняется теперь без затруднений. Действительно, ввиду формул (7) и (9), мы получим точку, изображающую произведение числа z_1 на z_2 , если вектор, идущий от 0 к z_1 (рис. 4), повернем на угол $\psi=\arg z_2$, а затем растянем этот вектор в r_2 раз. Далее, из (6) следует, что при $z_1\neq 0$ будет

$$z_1^{-1}=r^{-1}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)), \tag{11}$$

т. е. $|z_1^{-1}|=|z_1|^{-1}$, $\arg(z_1^{-1})=-\arg z_1$. Таким образом, мы получим точку z_1^{-1}, если от точки z_1 перейдем к точке z_1', лежащей на расстоянии r_1^{-1} от нуля на той же полупрямой, что и точка z_1 (рис. 5), а затем перейдем к точке, симметричной с z_1 относительно действительной оси.

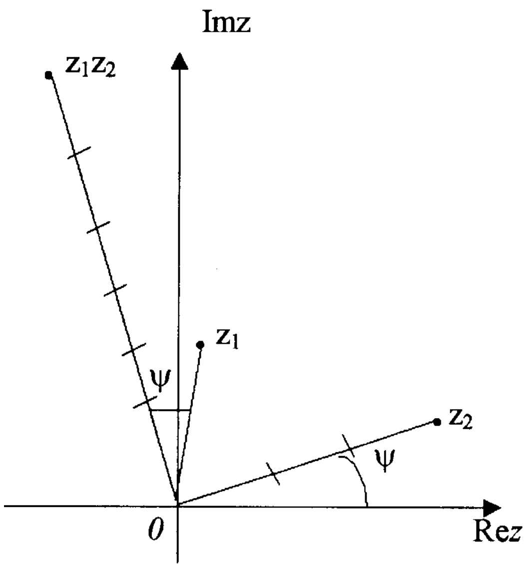

рис. 4

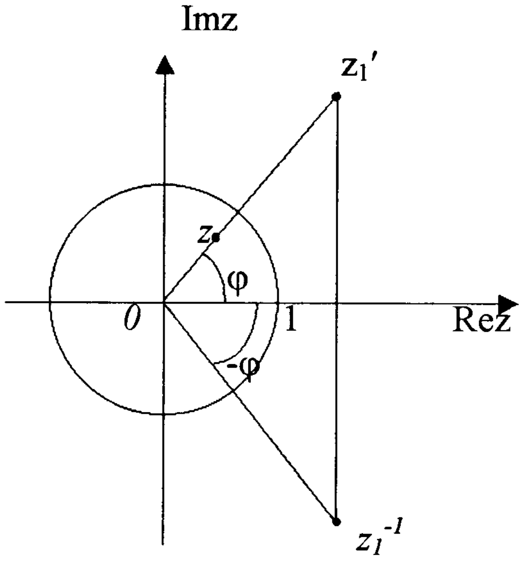

рис. 5

Следует заметить, что для комплексных чисел понятия "больше" и "меньше" не могут быть разумно определены, так как эти числа, в отличие от действительных чисел, располагаются не на прямой линии, точки которой естественным образом упорядочены, а на плоскости. Поэтому сами комплексные числа (а не их модули) никогда нельзя соединять знаком неравенства.

Замечание: *Взяв совокупность комплексных чисел $a+bi$, мы получим числовое поле, относительно четырех арифметических операций: сложения, умножения, вычитания и деления (замкнутость этих операций показана выше).*